

DR.ENG. AGUS SETYO MUNTOHAR, M.ENG.SC.



METODE NUMERIK

ANALISA DAN APLIKASI TEKNIK SIPIL

METODE NUMERIK

Dr.Eng. Agus Setyo Muntohar, M.Eng.Sc.



Penulis adalah Dosen pada Jurusan Teknik Sipil, Universitas Muhammadiyah Yogyakarta dan Dosen pada Department of Civil Engineering, Curtin University.
Telah menulis pula buku-buku dengan judul: JEMBATAN, MEKANIKA TANAH, TANAH LONGSOR, *RICE HUSK ASH ENHANCED LIME-STABILISED EXPANSIVE SOILS*

ISBN 979805313-3



Bagian Pertama: Pengantar Metode Numerik

BAB I PENDAHULUAN

KOMPETENSI LULUSAN					
KU-1	KU-2	KU-3	KP-1	KP-2	KP-3

TUJUAN PEMBELAJARAN :

Setelah membaca bagian ini, mahasiswa dapat memiliki kemampuan untuk :

1. Memahami pentingnya metode numerik, dan
2. Melanjutkan ke tahap model matematika, penyelesaian, dan penerapannya.

Sample Copy

1.1 PENGANTAR

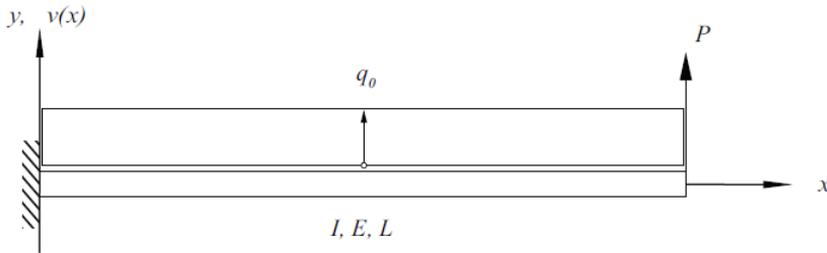
Model matematika merupakan bagian yang tak terpisahkan dalam penyelesaian masalah-masalah di bidang keteknikan. Dalam banyak hal, model-model matematika dikembangkan dari dasar-dasar ilmu dan keteknikan, sementara terdapat beberapa model matematika yang diperoleh dari data pengamatan atau terapan. Dalam bidang Teknik Sipil terdapat banyak pekerjaan yang memerlukan penyelesaian dengan pendekatan model matematika seperti analisis aliran dalam saluran terbuka, aliran dalam pipa, tegangan dan regangan dalam bahan, penurunan tanah, infiltrasi air, kapasitas fondasi tiang dan lain sebagainya. Untuk model yang relatif sederhana dan terdapat teorema matematika, maka model matematika tersebut menjadi mudah untuk diselesaikan. Namun, pada kebanyakan permasalahan Teknik Sipil, terdapat model matematika yang tidak dapat diselesaikan secara eksak atau analitik. Jikapun dapat diselesaikan, maka memerlukan prosedur yang rumit karena tidak memiliki teorema matematika. Beberapa contoh permasalahan model matematika dalam Teknik Sipil diuraikan dalam bagian berikut.

1.1.1 Defleksi Balok Kantilever

Defleksi balok kantilever seperti pada Gambar 1.1 yang berperilaku elastik, berdasarkan terorema Euler - Bernoulli dapat diselesaikan secara analitik dengan Persamaan (1.5).

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} = \frac{q_0}{EI} \quad (1.1)$$

Penyelesaian eksak persamaan differensial biasa (Persamaan 1.1) untuk deflksi balok dilakukan dengan empat kali integrasi tanpa kondisi batas seperti pada Persamaan 1.2a hingga 1.2d.



Gambar 1.1 Balok kantilever yang dibebani vertikal

$$\frac{d^3v(x)}{dx^3} = \frac{q_0x}{EI} + C_1 \quad (1.2a)$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{q_0x^2}{2EI} + C_1x + C_2 \quad (1.2b)$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = \frac{q_0x^3}{6EI} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad (1.2c)$$

$$v(x) = \frac{q_0x^4}{24EI} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3x + C_4 \quad (1.2d)$$

Dengan kondisi batas $v(0) = 0$ dan $\frac{dv(0)}{dx} = 0$, maka konstanta

$C_3 = C_4 = 0$. Kondisi batas pada ujung kanan, $\frac{d^2v(L)}{dx^2} = 0$, dan

$\frac{d^3v(L)}{dx^3} = P$, sehingga

$$\frac{d^2v(L)}{dx^2} = \frac{q_0L^2}{2EI} + C_1L + C_2 = 0$$

$$\frac{d^3v(L)}{dx^3} = \frac{q_0L}{EI} + C_1 = -\frac{P}{EI}$$

Maka, diperoleh $C_1 = -\frac{P}{EI} - \frac{q_0L}{EI}$; dan $C_2 = \frac{PL}{EI} + \frac{q_0L^2}{2EI}$

Defleksi balok Persamaan 1.2d menjadi :

$$v(x) = \frac{q_0L^4}{24EI} \left[6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{L}\right)^4 \right] + \frac{PL^4}{6EI} \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right]$$

Pendekatan dari persamaan (1.1) dapat dilakukan dengan metode beda hingga (*finite different method*), dimana

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v(x)}{dx^2} \right) - q_0 = 0$$

dengan, $\frac{d^2v}{dx^2} \approx \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{(\Delta x)^2}$



Gambar 1.2 Ilustrasi pendekatan beda hingga

Digunakan kondisi batas seperti penyelesaian analitik, penyelesaian numerik tersebut memerlukan pengulangan perhitungan. Perhitungan pada setiap titik (Gambar 1.2) diupayakan memiliki kesalahan perkiraan (*approximate error*) yang relatif kecil, agar dihasilkan nilai yang mendekati dengan penyelesaian eksak.

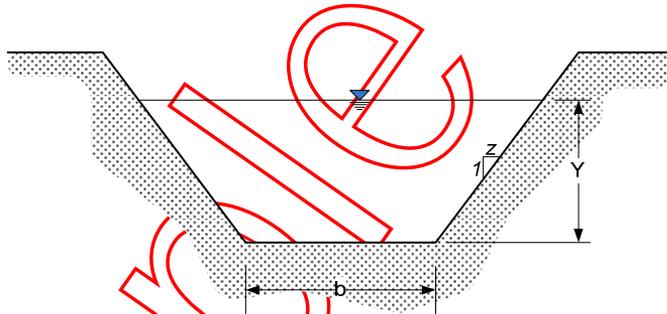
1.1.2 Aliran Air di Saluran Terbuka

Aliran air dalam saluran terbuka seperti saluran irigasi dan drainase dapat dimodelkan secara matematika dengan

persamaan Manning (Persamaan 1.3). Untuk keperluan perencanaan saluran, maka perlu diketahui tinggi sifat-sifat geometrik penampang saluran dan debit aliran.

$$Q = \frac{C_u}{n} \cdot A \cdot R^{2/3} \cdot S_0^{1/2} \quad (1.3)$$

dengan Q adalah debit aliran (m^3/s), C_u adalah konstanta = 1, n adalah koefisien gesek Manning, A adalah luas penampang (m^2), $R = A/P$ adalah jari-jari hidraulik dari penampang (m), P adalah keliling basah dari saluran (m), dan S_0 adalah kemiringan dasar saluran. Untuk saluran berbentuk trapezium seperti Gambar 1.3, maka luas penampang dan keliling basah dapat dituliskan dalam bentuk $A = (b + z \cdot y) y$; $P = b + 2y\sqrt{1 + z^2}$.



Gambar 1.3 Penampang saluran berbentuk trapesium.

Penyelesaian persamaan (1.3) untuk menentukan dimensi saluran dapat didekati dengan persamaan (1.3). Akar-akar persamaan dari Persamaan (1.3) untuk y , dapat diperoleh dengan menggunakan metode numerik.

$$f(\xi) = n \cdot Q \left(b + 2y\sqrt{1 + z^2} \right)^{2/3} - C_u \left[(b + z \cdot y) y \right]^{5/3} S_0^{1/2} = 0 \quad (1.3)$$

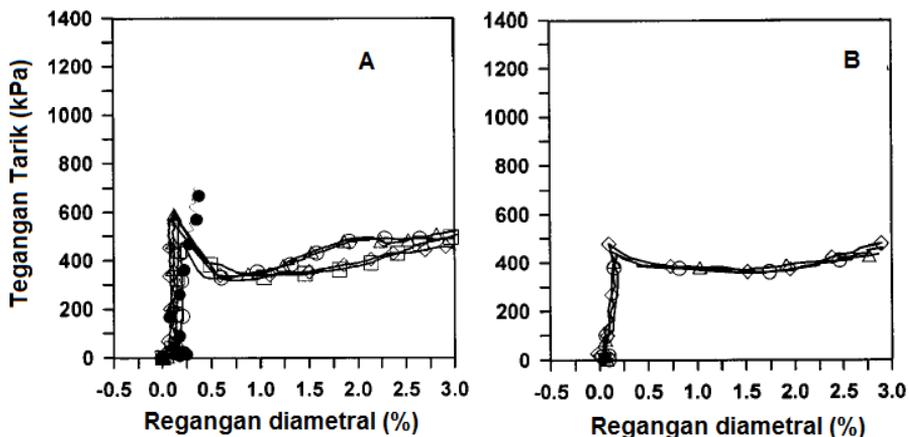
dimana $\xi = Q, b, z, S_0$, atau n .

1.1.3 Serapan Energy

Pada beberapa kasus bahan komposit seperti inklusi serat dalam beton atau tanah diharapkan dapat meningkatkan daktilitas bahan tersebut pasca tegangan puncak (*post peak stress*). Kontribusi serat tersebut sering dievaluasi berdasarkan nilai serapan energi yang dinyatakan dengan *toughness index* (*TI*) yaitu luasan di bawah kurva hubungan tegangan dan regangan seperti dirumuskan dalam Persamaan (1.4).

$$TI = \frac{A_{\epsilon} - A_p}{\epsilon - \epsilon_p} \quad (1.4)$$

dengan ϵ adalah regangan setelah tegangan puncak, ϵ_p adalah regangan pada saat tegangan puncak, A_{ϵ} adalah luasan di bawah kurva setelah regangan puncak, dan A_p adalah luasan di bawah kurva sebelum tegangan puncak.



Gambar 1.4 Tipikal hubungan tegangan tarik dan regangan dari inklusi serat pada tanah tersementasi (dimodifikasi dari Sobhan & Masnad, 2003)

Luasan di bawah kurva tegangan – regangan akan mudah dihitung bila bentuk kurva memiliki fungsi matematika seperti model hiperbolik, dan model nonlinier lainnya. Akan tetapi, sering dijumpai bahwa data tegangan-regangan seperti disajikan pada Gambar 1.3. Dengan demikian, luasan di bawah kurva A_{ϵ} dan A_p menjadi tidak mudah untuk ditentukan. Pendekatan integrasi numerik dengan irisan jamak (*multiple segment*) dapat diterapkan dengan cepat dan mudah.

1.1.4 Fondasi Tiang Yang Dibebeani Arah Lateral

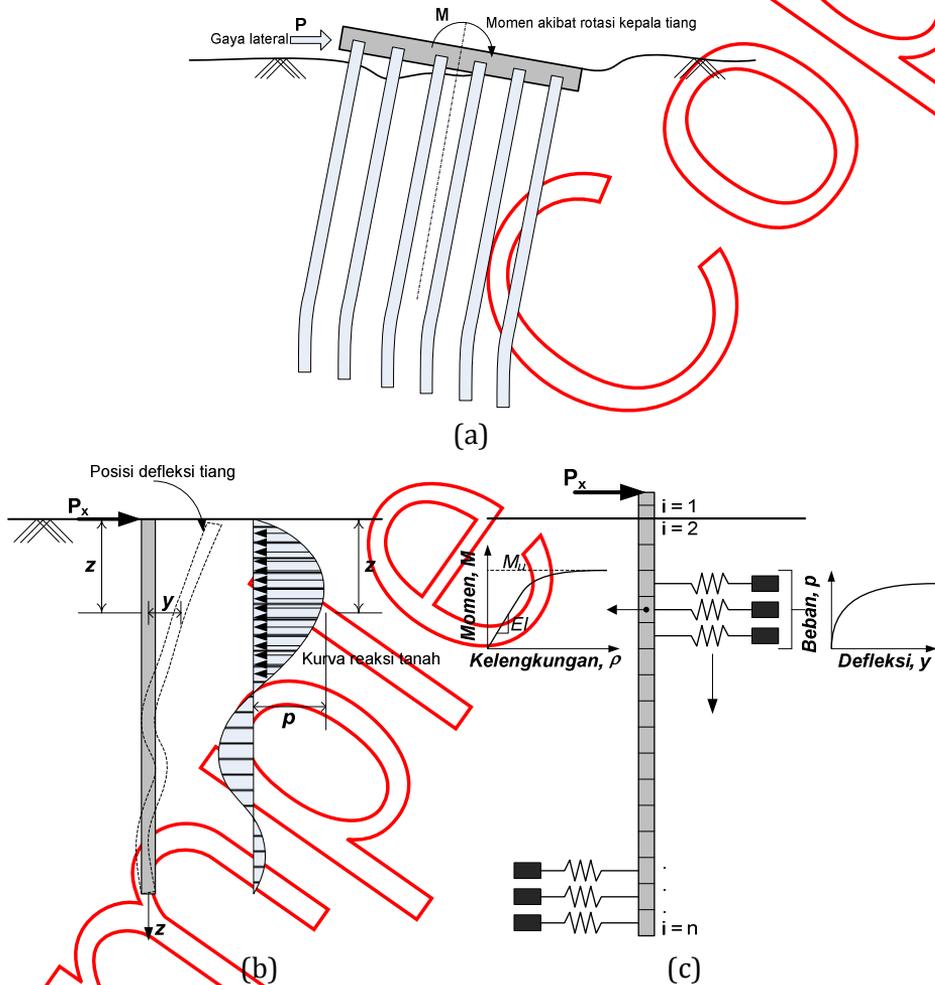
Seperti pada permasalahan fondasi tiang yang dibebani oleh gaya lateral (Gambar 1.4a), kinematika defleksi tiang dan reaksi tanah seperti pada Gambar 1.4b. Untuk menentukan kapasitas tiang terhadap gaya lateral dapat dilakukan dengan persamaan diferensial pada Persamaan (1.5).

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + P_x \frac{d^2 y}{dz^2} - k_s y = 0 \quad (1.5)$$

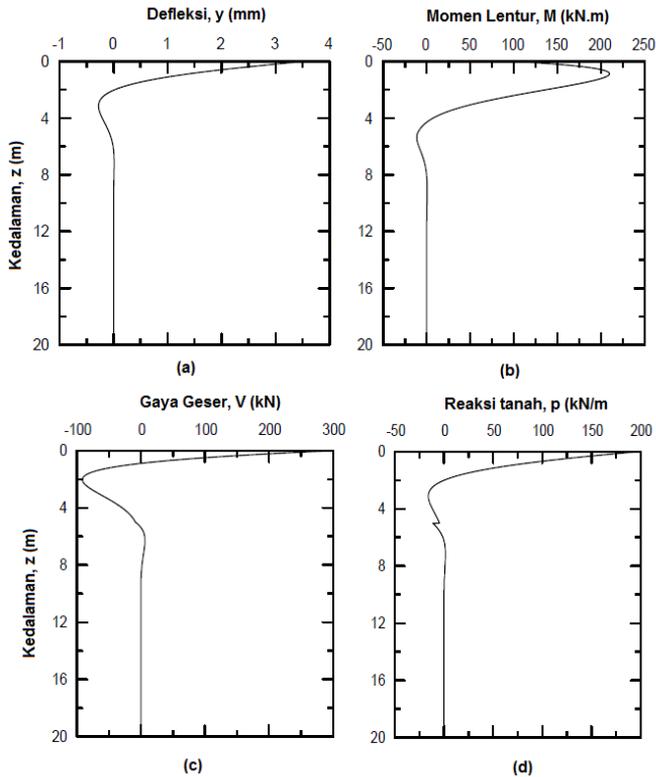
dengan EI merupakan kekakuan struktural tiang, P_x adalah gaya lateral k_s adalah modulus reaksi tanah, dan y adalah defleksi tiang.

Untuk menyelesaikan model matematika dalam Persamaan (1.5) tersebut secara eksak memerlukan pemahaman tentang kalkulus dan parameter tanah yang nonlinier dan rumit. Penyelesaian model defleksi tiang juga dapat dimodelkan sebagai tiang yang didukung oleh pegas-pegas seperti pada Gambar 1.4b yang lebih dikenal dengan model Winkler. Penyelesaian model ini dapat dilakukan secara numerik dengan menggunakan metode beda-hingga. Hasil analisis berupa

defleksi tiang, momen lentur, gaya geser, dan reaksi tanah (Gambar 1.5).



Gambar 1.5 (a) Kinematika tiang-tiang yang menerima gaya lateral, (b) Defleksi tiang dan reaksi tanah, (c) Model Winkler (Basu dkk., 2008; Huang, 2011)



Gambar 1.6 Tipikal hasil analisis numerik tiang yang dibebani gaya lateral dengan model Winkler (a) defleksi, (b) momen lentur, (c) gaya geser, (d) reaksi tanah (Basu dkk., 2008)

1.2 PRINSIP-DASAR METODE NUMERIK

Memperhatikan beberapa contoh permasalahan dalam Teknik Sipil seperti dijelaskan pada bagian sebelumnya, bahwa metode numerik merupakan cara untuk menyelesaikan model matematika sebagai pendekatan dari penyelesaian secara eksak. Maka algoritma dalam metode numerik harus tidak berbeda jauh dengan algoritma dari metode analitik. Sebagaimana dalam persamaan (1.1) dan (1.2), penyelesaian eksak memerlukan beberapa kondisi batas. Seperti

pada persamaan-persamaan (1.3) hingga (1.5) diperlukan pengulangan perhitungan atau iterasi hingga memberikan hasil yang paling dekat dengan penyelesaian eksak. Untuk itulah dalam metode numerik, masalah kesalahan perkiraan menjadi hal yang sangat penting untuk diperhatikan dalam setiap langkah penghitungan.

Penyelesaian dengan metode numerik terhadap model matematika pada umumnya melibatkan permasalahan tentang subyek berikut :

- a. Turunan,
- b. Persamaan nonlinier,
- c. Sistem persamaan linier,
- d. Interpolasi atau regresi,
- e. Integral, dan
- f. Persamaan diferensial.

Penggunaan metode numerik diharapkan dapat mengatasi berbagai kelemahan-kelemahan metode analitik. Algoritma penyelesaian model matematika dengan metode numerik, biasanya mudah diselesaikan dengan bahasa-bahasa pemrograman komputer. Dengan demikian, pengulangan prosedur perhitungan atau iterasi dapat dilakukan dengan lebih cepat.

Sample Copy