

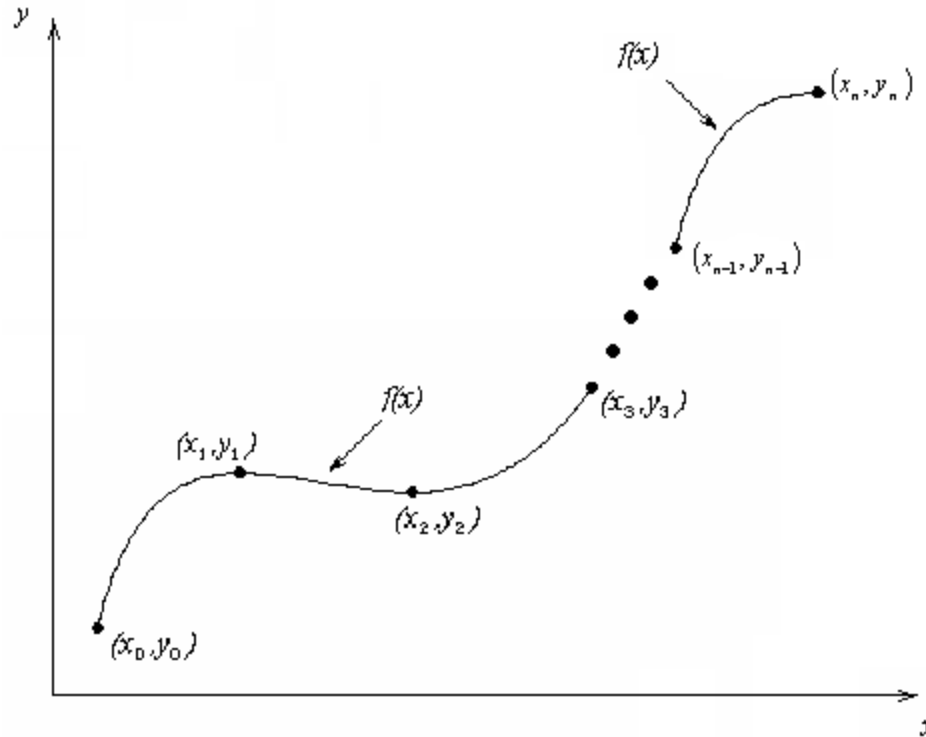


INTERPOLASI: METODE POLINOMIAL NDD (NEWTON'S DIVIDED DIFFERENCE)

Apa Interpolasi?

2

Diberikan data $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, nilai "y" diperoleh pada "x" yang tidak diketahui nilainya.



Gambar 1 Interpolasi data diskrit.

Interpolan

3

- Bentuk polinomial merupakan interpolan yang paling sering dipilih karena mudah untuk melakukan:
 - Evaluasi
 - Turunan, dan
 - Integral

Interpolasi Linier Metode NDD

4

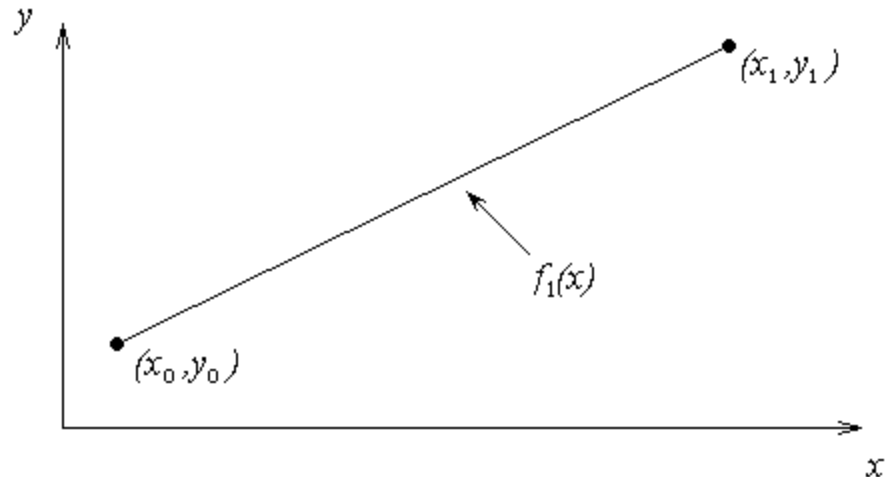
- Diberikan data (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , dan bentuk interpolan linier yang melalui data tersebut adalah

$$f_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0)$$

- dengan

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

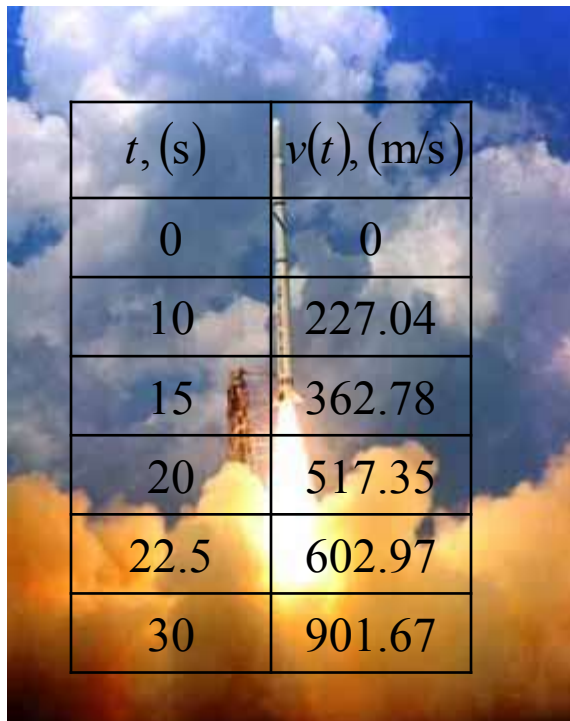


Contoh 1

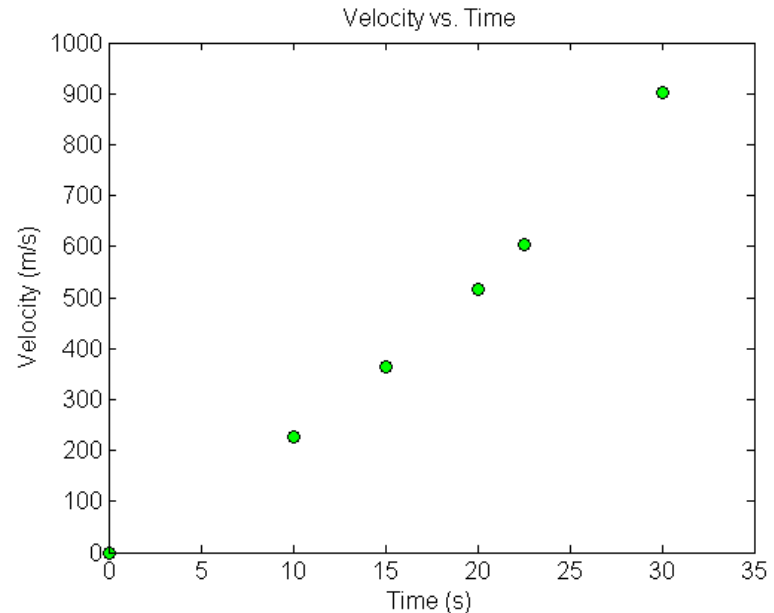
5

Kecepatan dorong sebuah roket diberikan sebagai fungsi waktu pada Tabel 1. Tentukan kecepatan roket pada $t = 16$ detik dengan menggunakan Metode Interpolasi Linier Metode NDD.

Table 1 Data kecepatan dan waktu



| $t, (s)$ | $v(t), (m/s)$ |
|----------|---------------|
| 0 | 0 |
| 10 | 227.04 |
| 15 | 362.78 |
| 20 | 517.35 |
| 22.5 | 602.97 |
| 30 | 901.67 |



Gambar 2 Plot data kecepatan dan waktu untuk Contoh 1

Interpolasi Linier Metode NDD

6

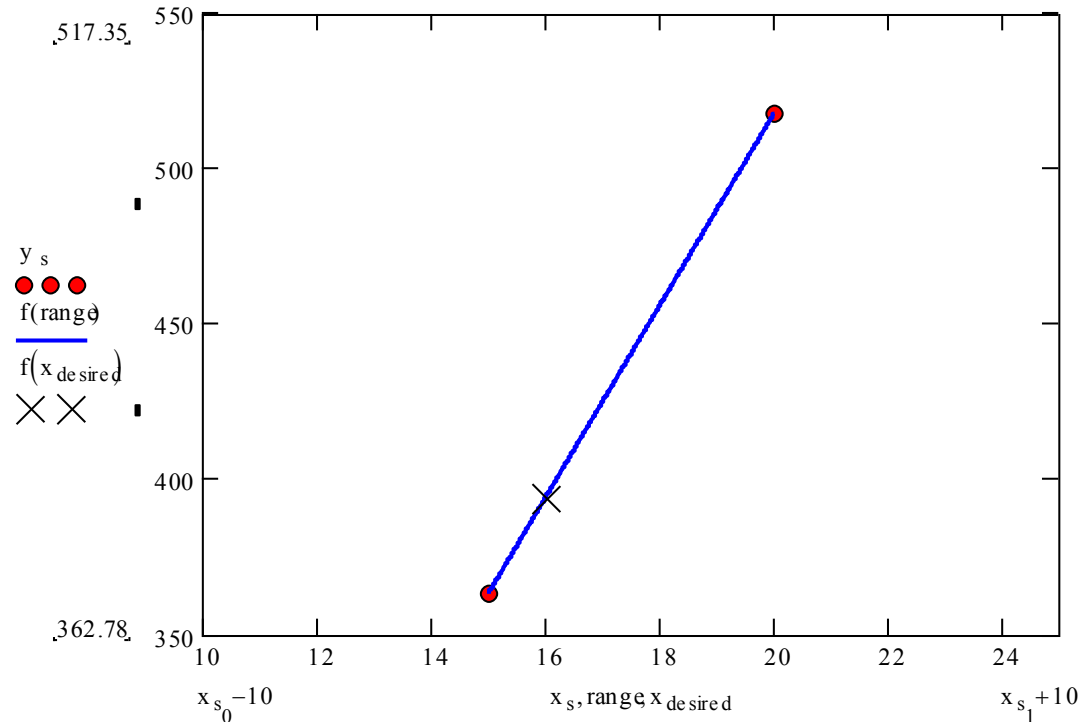
$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0)$$

$$t_0 = 15; \rightarrow v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20; \rightarrow v(t_1) = 517.35$$

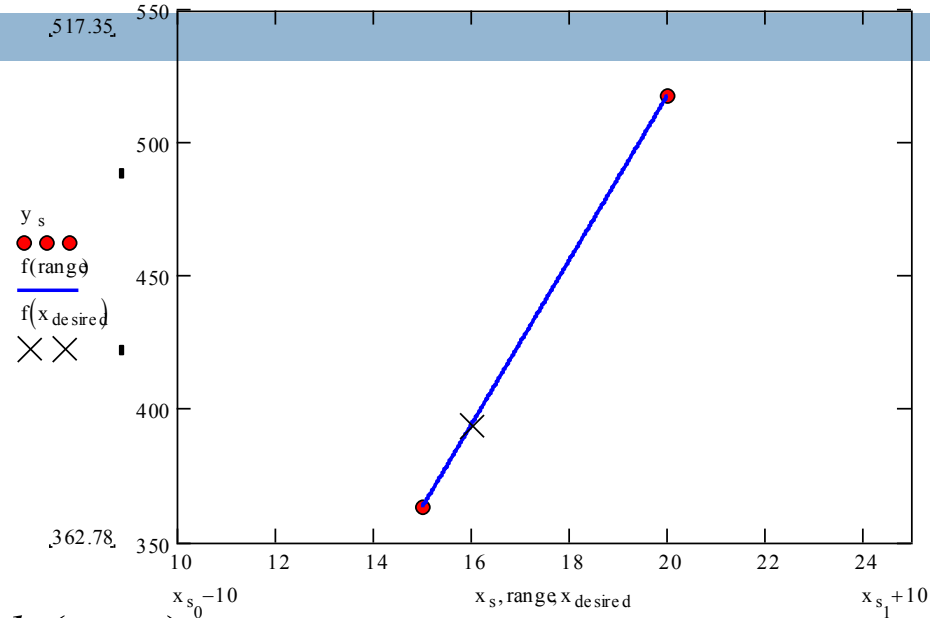
$$b_0 = v(t_0) = 362.78$$

$$b_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = 30.914$$



Interpolasi Linier Metode NDD

7



$$\begin{aligned}v(t) &= b_0 + b_1(t - t_0) \\ &= 362.78 + 30.914(t - 15), \quad 15 \leq t \leq 20\end{aligned}$$

At $t = 16$

$$\begin{aligned}v(16) &= 362.78 + 30.914(16 - 15) \\ &= 393.69 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Interpolasi Quadratic Metode NDD

8

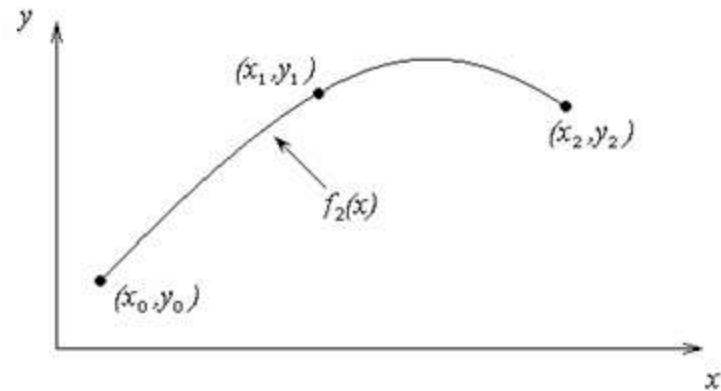
Diberikan data (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , dan (x_2, y_2) , bentuk interpolan kuadrat yang melalui data tersebut adalah

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

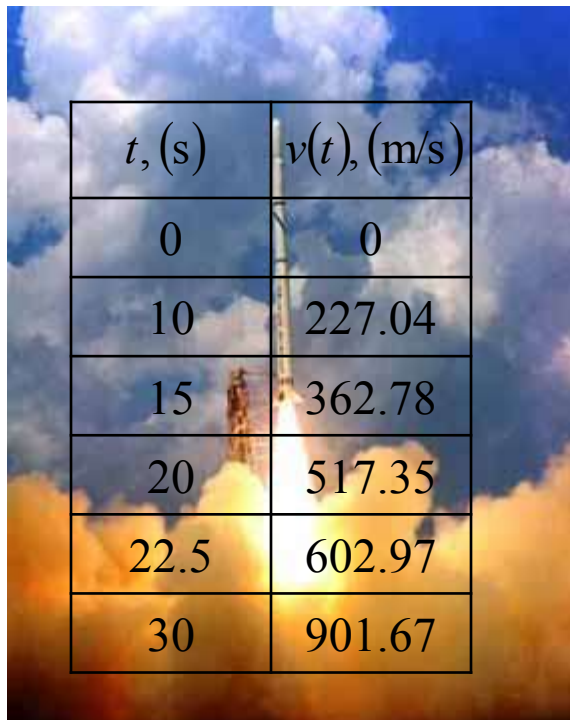


Contoh 2

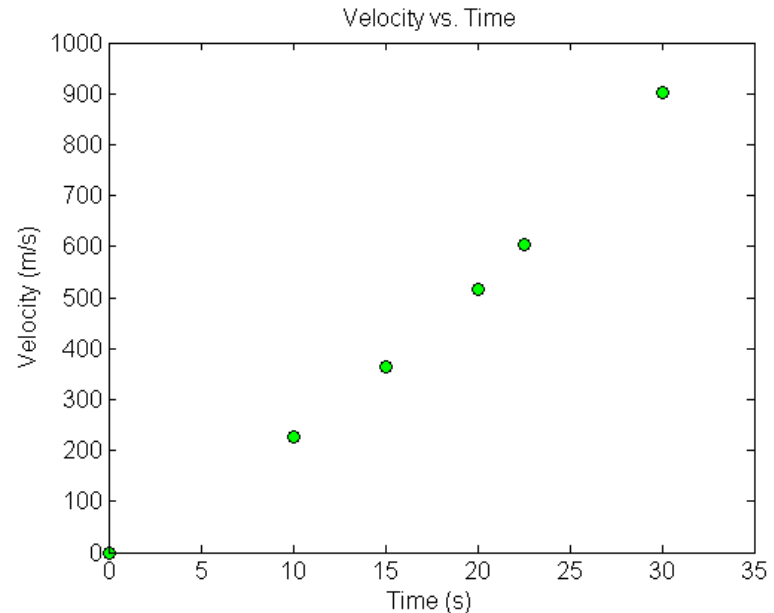
9

Kecepatan dorong sebuah roket diberikan sebagai fungsi waktu pada Tabel 1. Tentukan kecepatan roket pada $t = 16$ detik dengan menggunakan Metode Interpolasi Kuadrat Metode NDD.

Table 1 Data kecepatan dan waktu



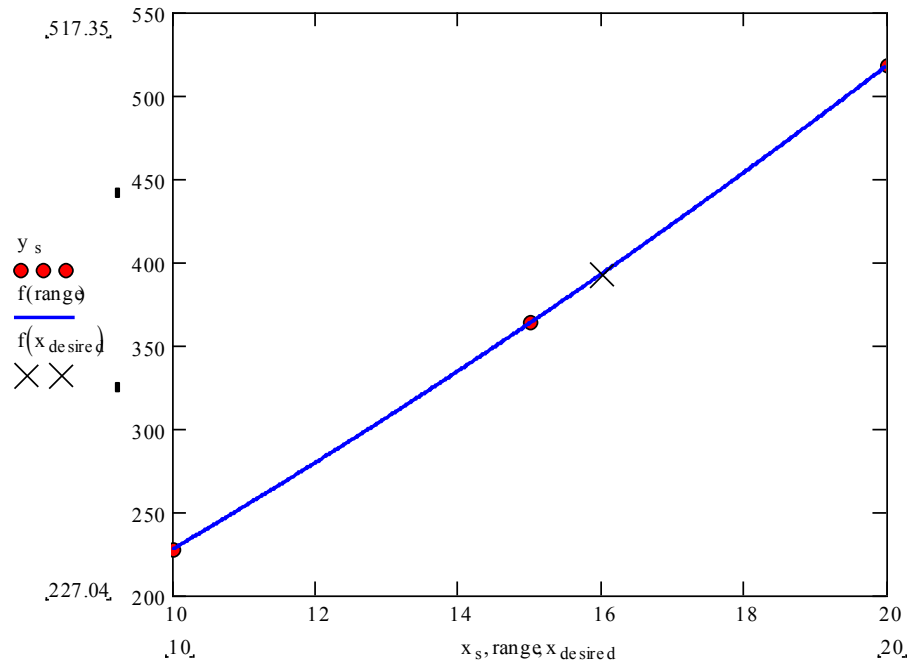
| $t, (s)$ | $v(t), (m/s)$ |
|----------|---------------|
| 0 | 0 |
| 10 | 227.04 |
| 15 | 362.78 |
| 20 | 517.35 |
| 22.5 | 602.97 |
| 30 | 901.67 |



Gambar 2 Plot data kecepatan dan waktu untuk Contoh 1

Interpolasi Kuadrat Metode NDD

10



$$t_0 = 10, \quad v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15, \quad v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20, \quad v(t_2) = 517.35$$

Interpolasi Kuadrat Metode NDD

11

$$b_0 = v(t_0)$$

$$= 227.04$$

$$b_1 = \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{362.78 - 227.04}{15 - 10}$$

$$= 27.148$$

$$b_2 = \frac{\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} - \frac{v(t_1) - v(t_0)}{t_1 - t_0}}{t_2 - t_0} = \frac{\frac{517.35 - 362.78}{20 - 15} - \frac{362.78 - 227.04}{15 - 10}}{20 - 10}$$

$$= \frac{30.914 - 27.148}{10}$$

$$= 0.37660$$

Quadratic Interpolation (contd)

12

$$\begin{aligned}v(t) &= b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1) \\ &= 227.04 + 27.148(t - 10) + 0.37660(t - 10)(t - 15), \quad 10 \leq t \leq 20\end{aligned}$$

At $t = 16$,

$$v(16) = 227.04 + 27.148(16 - 10) + 0.37660(16 - 10)(16 - 15) = 392.19 \text{ m/s}$$

Nilai kesalahan perkiraan dari hasil interpoasi linier dan kuadrat yaitu :

$$\begin{aligned}|\epsilon_a| &= \left| \frac{392.19 - 393.69}{392.19} \right| \times 100 \\ &= 0.38502 \%\end{aligned}$$

Bentuk Umum: Interpolasi Kuadrat Metode NDD

13

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

dimana

$$b_0 = f[x_0] = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Ditulis kembali menjadi

$$f_2(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

Bentuk Umum

14

Untuk $(n + 1)$ titik data, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$

yang dituliskan sebagai

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

dimana

$$b_0 = f[x_0]$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

⋮

$$b_{n-1} = f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]$$

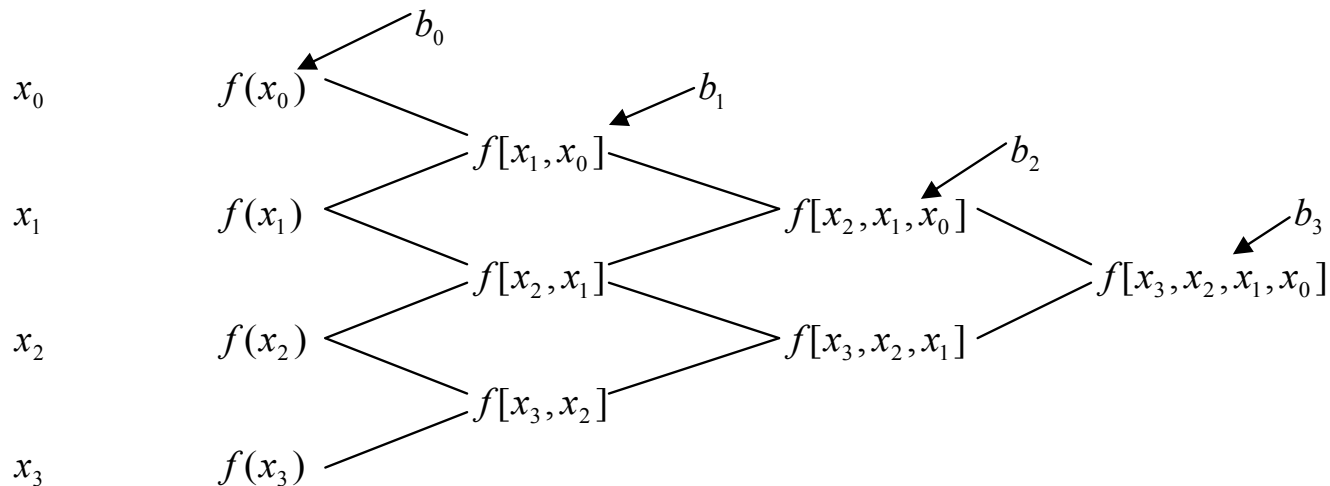
$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$$

Bentuk Umum

15

Bentuk polinomial derajat tiga dari (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , dan (x_3, y_3) , adalah

$$f_3(x) = f[x_0] + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

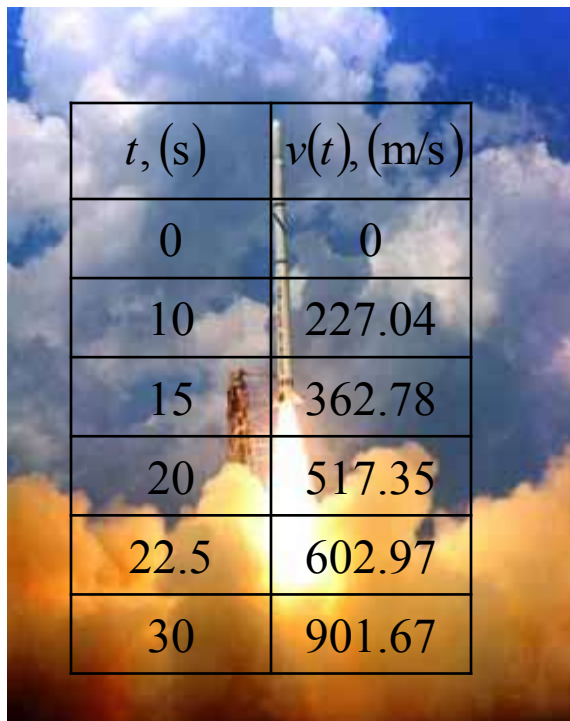


Contoh 3

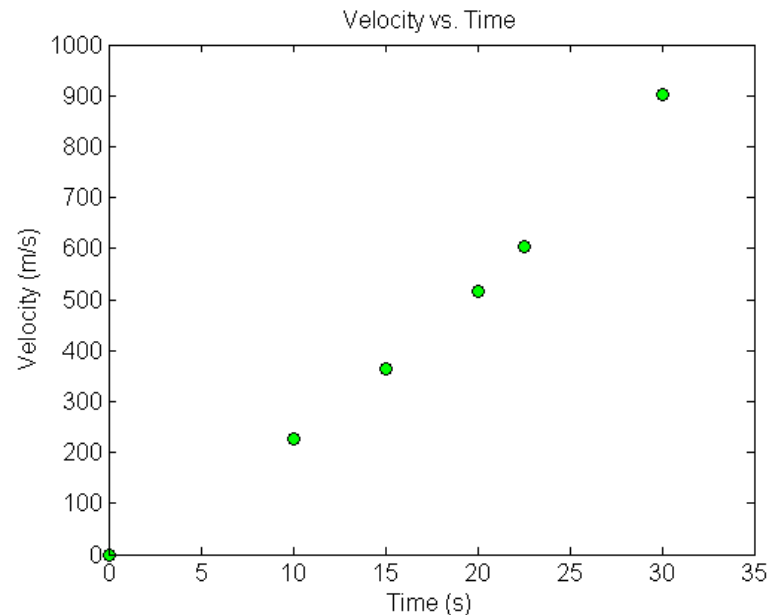
16

Kecepatan dorong sebuah roket diberikan sebagai fungsi waktu pada Tabel 1. Tentukan kecepatan roket pada $t = 16$ detik dengan menggunakan Metode Interpolasi Kubik Metode NDD.

Table 1 Data kecepatan dan waktu



| $t, (s)$ | $v(t), (m/s)$ |
|----------|---------------|
| 0 | 0 |
| 10 | 227.04 |
| 15 | 362.78 |
| 20 | 517.35 |
| 22.5 | 602.97 |
| 30 | 901.67 |



Gambar 2 Plot data kecepatan dan waktu untuk Contoh 1

Contoh 3

17

Profil kecepatan untuk polinomial derajat tiga

$$v(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1) + b_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)$$

Diperlukan 4 titik data yang terdekat dengan $t = 16$

$$t_0 = 10, \quad v(t_0) = 227.04$$

$$t_1 = 15, \quad v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20, \quad v(t_2) = 517.35$$

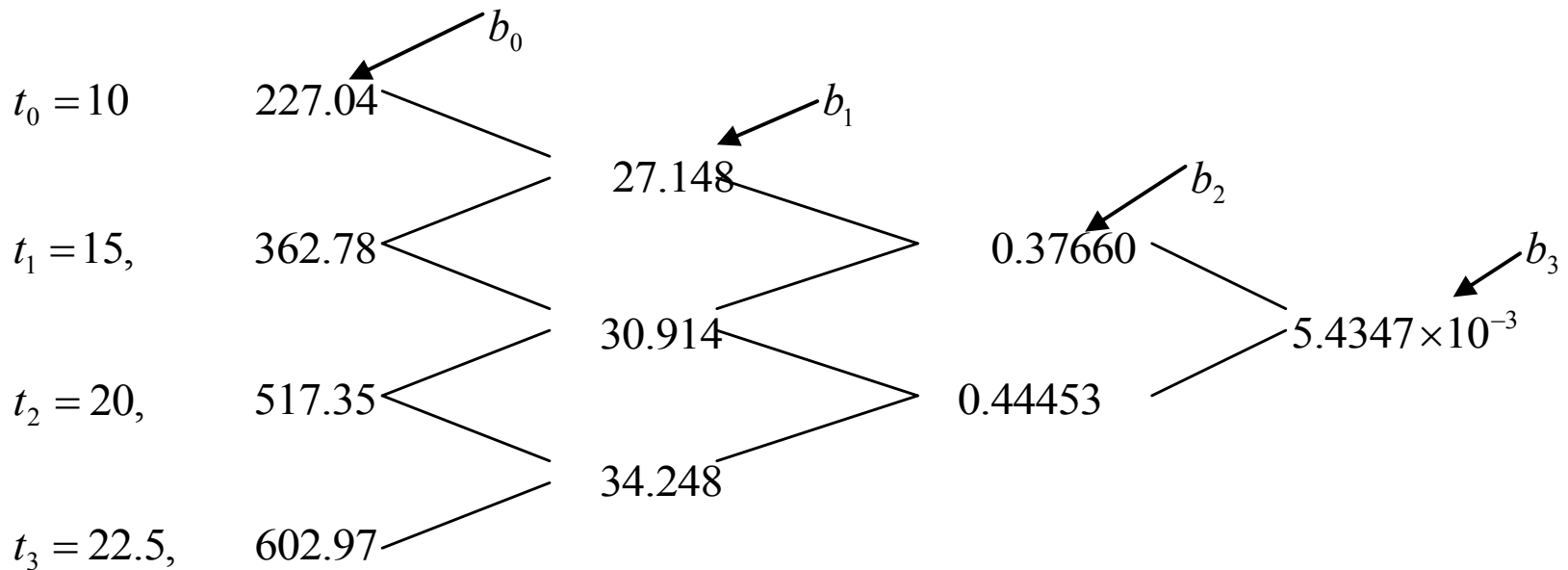
$$t_3 = 22.5, \quad v(t_3) = 602.97$$

Diperoleh nilai dari konstanta yaitu:

$$b_0 = 227.04; \quad b_1 = 27.148; \quad b_2 = 0.37660; \quad b_3 = 5.4347 \times 10^{-3}$$

Contoh 3

18



$$b_0 = 227.04; b_1 = 27.148; b_2 = 0.37660; b_3 = 5.4347 \times 10^{-3}$$

Contoh 3

19

Maka

$$\begin{aligned}v(t) &= b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)(t - t_1) + b_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) \\ &= 227.04 + 27.148(t - 10) + 0.37660(t - 10)(t - 15) \\ &\quad + 5.4347 * 10^{-3}(t - 10)(t - 15)(t - 20)\end{aligned}$$

Pada $t = 16$

$$\begin{aligned}v(16) &= 227.04 + 27.148(16 - 10) + 0.37660(16 - 10)(16 - 15) \\ &\quad + 5.4347 * 10^{-3}(16 - 10)(16 - 15)(16 - 20) \\ &= 392.06 \text{ m/s}\end{aligned}$$

The absolute relative approximate error $|\epsilon_a|$ obtained is

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{392.06 - 392.19}{392.06} \right| \times 100$$

$$= 0.033427\%$$

Dr.Eng. Agus S. Muntehar

Perbandingan Hasil

20

| Pangkat Polinomial: | 1 | 2 | 3 |
|------------------------|--------|-----------|------------|
| $v(t=16)$ m/s | 393.69 | 392.19 | 392.06 |
| Kesalahan relatif | ----- | 0.38502 % | 0.033427 % |

Distance from Velocity Profile

21

Find the distance covered by the rocket from $t=11$ s to $t=16$ s ?

$$v(t) = 227.04 + 27.148(t - 10) + 0.37660(t - 10)(t - 15) + 5.4347 * 10^{-3} (t - 10)(t - 15)(t - 20) \quad 10 \leq t \leq 22.5$$

$$= -4.2541 + 21.265t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3 \quad 10 \leq t \leq 22.5$$

So

$$s(16) - s(11) = \int_{11}^{16} v(t) dt$$

$$= \int_{11}^{16} (-4.2541 + 21.265t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3) dt$$

$$= \left[-4.2541t + 21.265 \frac{t^2}{2} + 0.13204 \frac{t^3}{3} + 0.0054347 \frac{t^4}{4} \right]_{11}^{16}$$

$$= 1605 \text{ m}$$

Dr.Eng. Agus S. Muntohar

Acceleration from Velocity Profile

22

Find the acceleration of the rocket at $t=16\text{ s}$ given that

$$v(t) = -4.2541 + 21.265t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3$$

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} (-4.2541 + 21.265t + 0.13204t^2 + 0.0054347t^3)$$

$$= 21.265 + 0.26408t + 0.016304t^2$$

$$a(16) = 21.265 + 0.26408(16) + 0.016304(16)^2$$

$$= 29.664 \text{ m/s}^2$$