



INTERPOLASI: METODE LAGRANGE

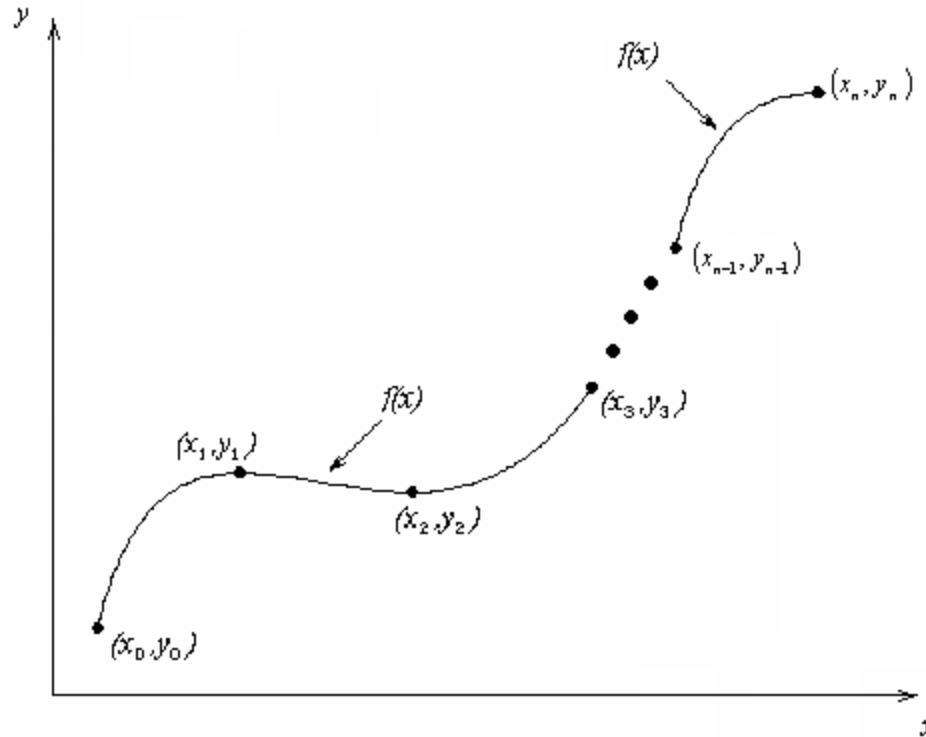
Pertemuan ke-12:
20 Desember 2012

Dr.Eng. Agus S. Muntohar

Apa Interpolasi?

2

Diberikan data $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, nilai "y" diperoleh pada "x" yang tidak diketahui nilainya.



Gambar 1 Interpolasi data diskrit.

Interpolan

3

- Bentuk polinomial merupakan interpolan yang paling sering dipilih karena mudah untuk melakukan:
 - Evaluasi
 - Turunan, dan
 - Integral

Interpolasi Lagrangian

4

- Interpolasi polinomial Lagrangian dinyatakan sebagai

$$f_i(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

- Dimana $n =$ pangkat polinomial ke- n yang didekati dengan fungsi $y = f(x)$ untuk setiap $(n+1)$ titik data $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n)$ dan

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- $L_i(x) =$ fungsi bobot (*weighting function*) untuk hasil ke $(n-1)$ dimana untuk hasil $j = i$ diabaikan

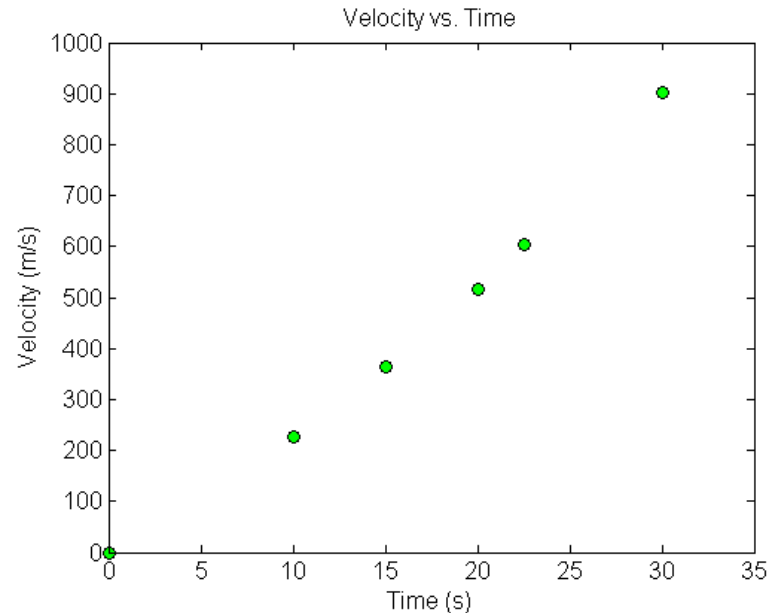
Contoh 1

5

Kecepatan dorong sebuah roket diberikan sebagai fungsi waktu pada Tabel 1. Tentukan kecepatan roket pada $t = 16$ detik dengan menggunakan Metode Lagrange.

Table 1 Data kecepatan dan waktu

$t, (s)$	$v(t), (m/s)$
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Gambar 2 Plot data kecepatan dan waktu untuk Contoh 1

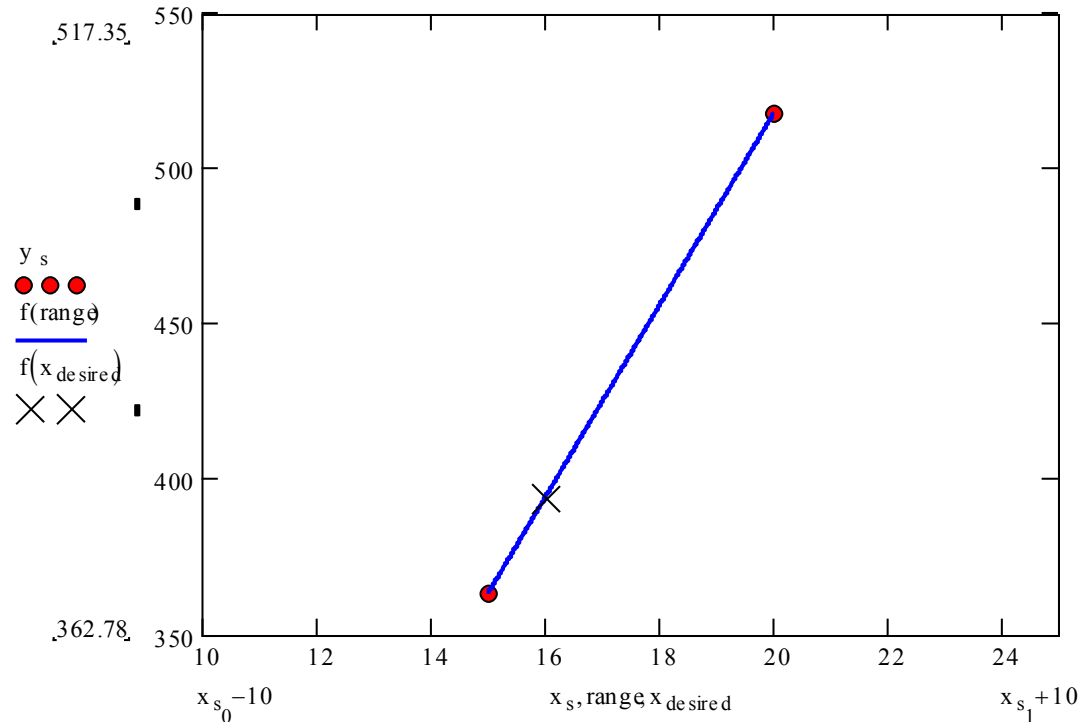
Interpolasi Linier Lagrange (1)

6

$$v(t) = \sum_{i=0}^1 L_i(t)v(t_i)$$
$$= L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1)$$

$$t_0 = 15; \rightarrow v(t_0) = 362.78$$

$$t_1 = 20; \rightarrow v(t_1) = 517.35$$



Interpolasi Linier Lagrange (2)

7

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^1 \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \frac{t-t_1}{t_0-t_1}$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^1 \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \frac{t-t_0}{t_1-t_0}$$

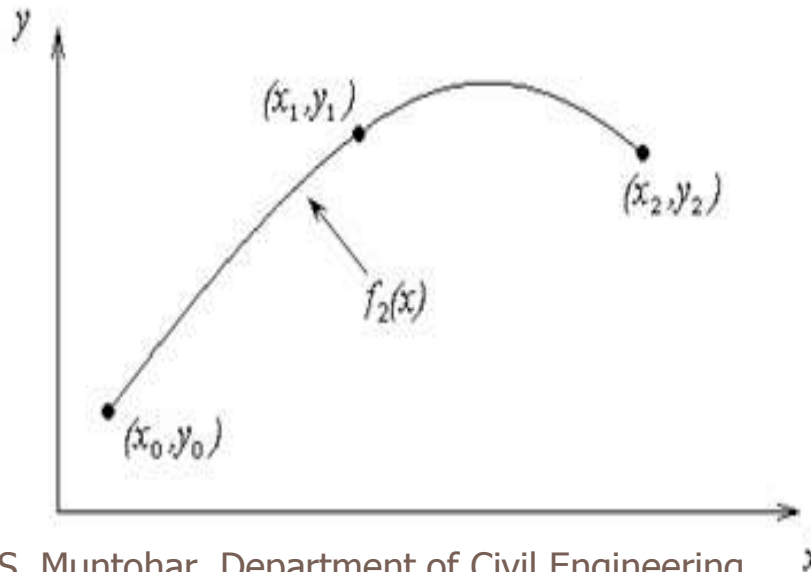
$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{t-t_1}{t_0-t_1} v(t_0) + \frac{t-t_0}{t_1-t_0} v(t_1) \\ &= \frac{t-20}{15-20} (362.78) + \frac{t-15}{20-15} (517.35) \\ &= \frac{16-20}{15-20} (362.78) + \frac{16-15}{20-15} (517.35) \\ &= 0.8(362.78) + 0.2(517.35) = 393.7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Interpolasi Kuadratik Lagrange

8

- Interpolasi polinomial pangkat 2 atau kuadratik dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}v(t) &= \sum_{i=0}^2 L_i(t)v(t_i) \\ &= L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1) + L_2(t)v(t_2)\end{aligned}$$



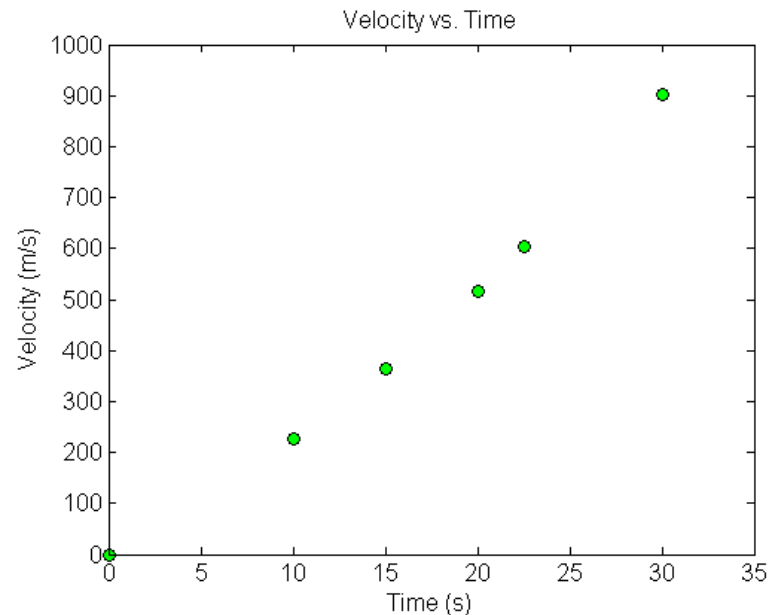
Contoh 2

9

Kecepatan dorong sebuah roket diberikan sebagai fungsi waktu pada Tabel 1. Tentukan kecepatan roket pada $t = 16$ detik dengan menggunakan Metode Kuadratik Lagrange.

Table 1 Data kecepatan dan waktu

$t, (s)$	$v(t), (m/s)$
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Gambar 2 Plot data kecepatan dan waktu untuk Contoh 1

Interpolasi Kuadratik Lagrange (2)

10

$$t_0 = 10; \rightarrow v(t_0) = 227.04$$

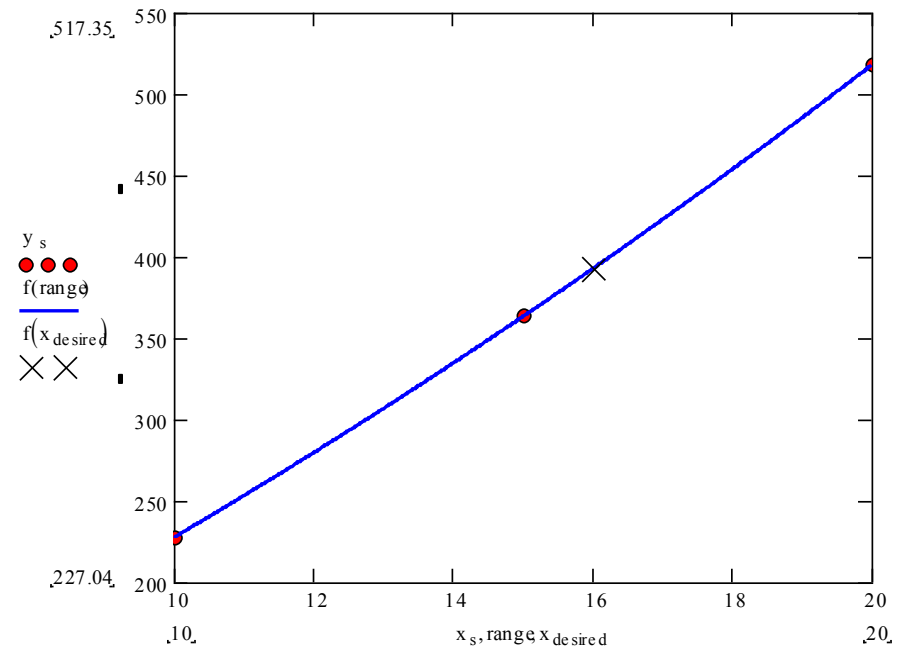
$$t_1 = 15; \rightarrow v(t_1) = 362.78$$

$$t_2 = 20; \rightarrow v(t_2) = 517.35$$

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2} \right)$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2} \right)$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^2 \frac{t-t_j}{t_2-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right)$$



Interpolasi Kuadratik Lagrange (3)

11

$$v(t) = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2} \right) v(t_0) + \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2} \right) v(t_1) + \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right) v(t_2)$$

$$\begin{aligned} v(16) &= \left(\frac{16-15}{10-15} \right) \left(\frac{16-20}{10-20} \right) (227.04) + \left(\frac{16-10}{15-10} \right) \left(\frac{16-20}{15-20} \right) (362.78) \\ &\quad + \left(\frac{16-10}{20-10} \right) \left(\frac{16-15}{20-15} \right) (517.35) \\ &= (-0.08)(227.04) + (0.96)(362.78) + (0.12)(527.35) = 392.19 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Kesalahan relatif terhadap interpolasi linier

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{392.19 - 393.70}{392.19} \right| \times 100 = 0.38410\%$$

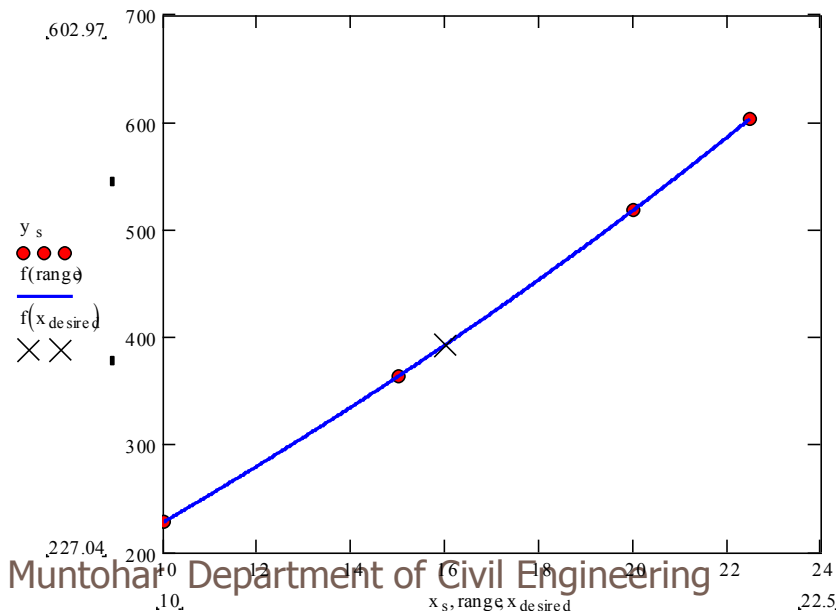
Interpolasi Kubik Lagrange

12

- Interpolasi polinomial pangkat 3 atau kubik dapat dinyatakan sebagai

$$v(t) = \sum_{i=0}^3 L_i(t)v(t_i)$$

$$= L_0(t)v(t_0) + L_1(t)v(t_1) + L_2(t)v(t_2) + L_3(t)v(t_3)$$



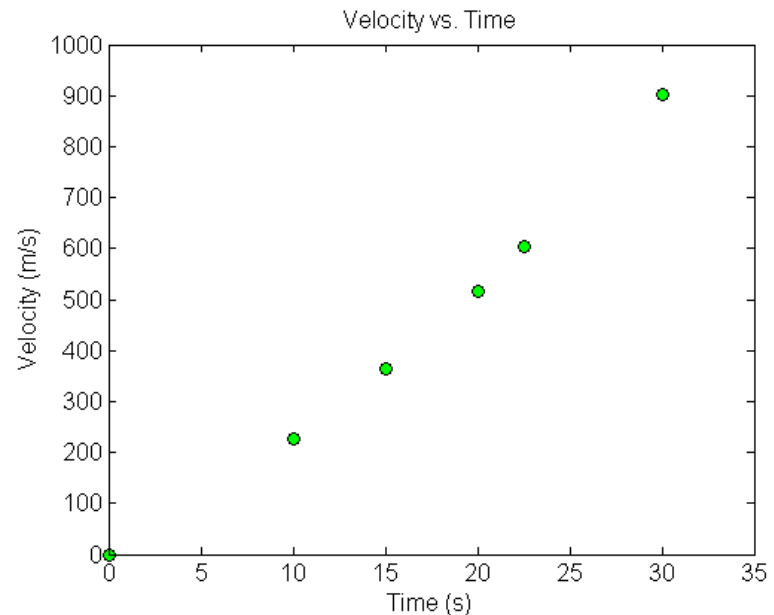
Contoh 3

13

Kecepatan dorong sebuah roket diberikan sebagai fungsi waktu pada Tabel 1. Tentukan kecepatan roket pada $t = 16$ detik dengan menggunakan Metode Kubik Lagrange.

Table 1 Data kecepatan dan waktu

$t, (s)$	$v(t), (m/s)$
0	0
10	227.04
15	362.78
20	517.35
22.5	602.97
30	901.67



Gambar 2 Plot data kecepatan dan waktu untuk Contoh 1

Interpolasi Kubik Lagrange (2)

14

$$t_0 = 10; \rightarrow v(t_0) = 227.04; \quad t_1 = 15; \rightarrow v(t_1) = 362.78$$

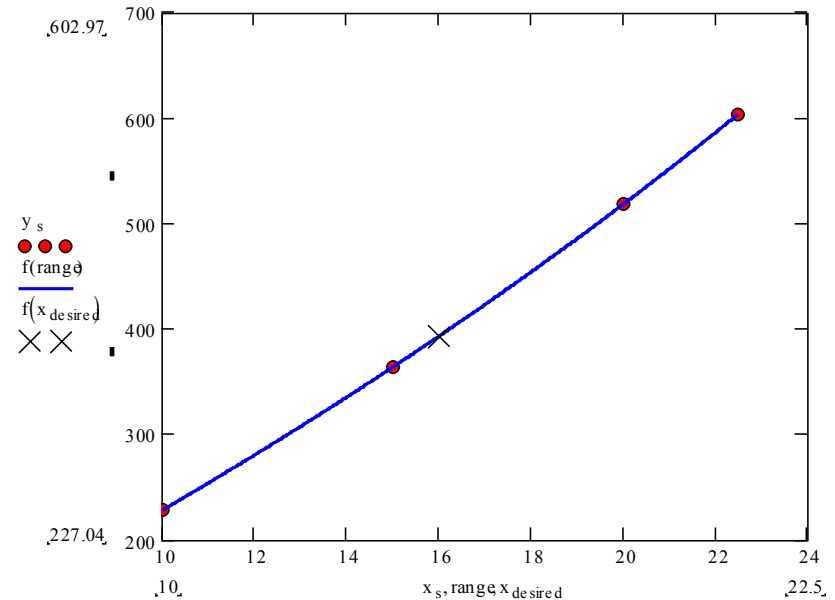
$$t_2 = 20; \rightarrow v(t_2) = 517.35; \quad t_3 = 22.5; \rightarrow v(t_3) = 602.97$$

$$L_0(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{t-t_j}{t_0-t_j} = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2} \right) \left(\frac{t-t_3}{t_0-t_3} \right)$$

$$L_1(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{t-t_j}{t_1-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2} \right) \left(\frac{t-t_3}{t_1-t_3} \right)$$

$$L_2(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{t-t_j}{t_2-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \right) \left(\frac{t-t_3}{t_2-t_3} \right)$$

$$L_3(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{t-t_j}{t_3-t_j} = \left(\frac{t-t_0}{t_3-t_0} \right) \left(\frac{t-t_1}{t_3-t_1} \right) \left(\frac{t-t_2}{t_3-t_2} \right)$$



Cubic Interpolation (contd)

15

$$v(t) = \left(\frac{t-t_1}{t_0-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_0-t_2}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_0-t_3}\right)v(t_1) + \left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_1-t_2}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_1-t_3}\right)v(t_2) + \left(\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)\left(\frac{t-t_3}{t_2-t_3}\right)v(t_2) \\ + \left(\frac{t-t_1}{t_3-t_1}\right)\left(\frac{t-t_2}{t_3-t_2}\right)\left(\frac{t-t_0}{t_3-t_0}\right)v(t_3)$$

$$v(16) = \left(\frac{16-15}{10-15}\right)\left(\frac{16-20}{10-20}\right)\left(\frac{16-22.5}{10-22.5}\right)(227.04) + \left(\frac{16-10}{15-10}\right)\left(\frac{16-20}{15-20}\right)\left(\frac{16-22.5}{15-22.5}\right)(362.78) \\ + \left(\frac{16-10}{20-10}\right)\left(\frac{16-15}{20-15}\right)\left(\frac{16-22.5}{20-22.5}\right)(517.35) + \left(\frac{16-10}{22.5-10}\right)\left(\frac{16-15}{22.5-15}\right)\left(\frac{16-20}{22.5-20}\right)(602.97) \\ = (-0.0416)(227.04) + (0.832)(362.78) + (0.312)(517.35) + (-0.1024)(602.97) = 392.06 \text{ m/s}$$

Kesalahan relatif terhadap interpolasi kuadrat

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{392.06 - 392.19}{392.06} \right| \times 100 \\ = 0.033269\%$$

Perbandingan Hasil Hitungan Metode Lagrange dan NDD

16

Metode NDD

Pangkat Polinomial:	1	2	3
$v(t=16)$ m/s	393.69	392.19	392.06
Kesalahan relatif	-----	0.38502 %	0.033427 %

Metode Lagrange

Pangkat Polinomial:	1	2	3
$v(t=16)$ m/s	393.69	392.19	392.06
Kesalahan relatif	-----	0.38410%	0.033269%

Distance from Velocity Profile

17

Find the distance covered by the rocket from $t=11$ s to $t=16$ s ?

$$v(t) = (t^3 - 57.5t^2 + 1087.5t - 6750)(-0.36326) + (t^3 - 52.5t^2 + 875t - 4500)(1.9348) \\ + (t^3 - 47.5t^2 + 712.5t - 3375)(-4.1388) + (t^3 - 45t^2 + 650t - 3000)(2.5727)$$

$$v(t) = -4.245 + 21.265t + 0.13195t^2 + 0.00544t^3, \quad 10 \leq t \leq 22.5$$

$$s(16) - s(11) = \int_{11}^{16} v(t) dt \\ \approx \int_{11}^{16} (-4.245 + 21.265t + 0.13195t^2 + 0.00544t^3) dt \\ = \left[-4.245t + 21.265 \frac{t^2}{2} + 0.13195 \frac{t^3}{3} + 0.00544 \frac{t^4}{4} \right]_{11}^{16}$$

Dr.Eng. Agus S. Muntohar Department of Civil Engineering
= 1605 m

Acceleration from Velocity Profile

18

Find the acceleration of the rocket at $t=16s$ given that

$$v(t) = -4.245 + 21.265t + 0.13195t^2 + 0.00544t^3, \quad 10 \leq t \leq 22.5$$

$$a(t) = \frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}(-4.245 + 21.265t + 0.13195t^2 + 0.00544t^3)$$

$$= 21.265 + 0.26390t + 0.01632t^2$$

$$a(16) = 21.265 + 0.26390(16) + 0.01632(16)^2$$

$$= 29.665 \text{ m/s}^2$$