



Pertemuan ke-6
Persamaan Linier Simultan

18 Oktober 2012

Dekomposisi Matriks Segitiga Bawah – Atas (LU Decomposition)

Dr.Eng. Agus S. Muntohar
Department of Civil Engineering

1

Metode LU Decomposition

- Untuk matriks non-singular $[A]$ yang dapat diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss pada langkah eliminasi maju, maka matriks dapat dituliskan sebagai

$$[A] = [L][U]$$

- $[L]$ = matriks segitiga bawah (lower triangular matrix)
- $[U]$ = matriks segitiga atas (upper triangular matrix)

Dr.Eng. Agus S. Muntohar
Department of Civil Engineering

2

Metode LU Decomposition

- Algoritma:

Diberikan persamaan $[A][X] = [C]$

1. Dekomposisi matriks $[A]$ menjadi $[L]$ dan $[U]$
2. Selesaikan $[L][Z] = [C]$ untuk memperoleh $[Z]$
3. Selesaikan $[U][X] = [Z]$ untuk memperoleh $[X]$

Langkah 1:

- Dekomposisi $[A]$ menjadi $[L]$ dan $[U]$

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$[U]$ adalah sama dengan koefisien matriks pada akhir langkah eliminasi maju.

$[L]$ diperoleh dengan menggunakan pengali yang digunakan pada setiap langkah eliminasi maju.

Langkah 1: Menentukan Matriks $[U]$

- Gunakan prosedur eliminasi maju dari Metode Eliminasi Gauss

- Contoh:
$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

Tahap 1:

$$\frac{64}{25} = 2.56$$

$$\Rightarrow \text{Baris ke-2} - \text{Baris ke-1}(2.56) = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{144}{25} = 5.76$$

$$\Rightarrow \text{Baris ke-3} - \text{Baris ke-1}(5.76) = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{bmatrix}$$

Pengali

Langkah 1: Menentukan Matriks $[U]$

- Matriks hasil Tahap 1:
$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{bmatrix}$$

Tahap 2:

$$\frac{-16.8}{-4.8} = 3.5 \Rightarrow \text{Baris ke-3} - \text{Baris ke-2}(3.5) = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

- Matriks hasil Tahap 2:

$$[U] = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Langkah 1: Menentukan Matriks [L]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

- Gunakan pengali yang digunakan pada setiap langkah eliminasi maju.
- Dari tahap ke-1 eliminasi maju maka :

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix},$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{64}{25} = 2.56 \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{144}{25} = 5.76$$

Langkah 1: Menentukan Matriks [L]

- Dari tahap ke-1 eliminasi maju maka :

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & -16.8 & -4.76 \end{bmatrix},$$

$$l_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-16.8}{-4.8} = 3.5$$

- Matriks [L] :

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Apakah $[L][U] = [A]$?

$$[L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

- Gunakan Matriks Dekomposisi LU Untuk Menyelesaikan Persamaan Linier

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Langkah 2

- Tentukan $[L][Z] = [C]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

- Selesaikan matriks $[Z]$

$$z_1 = 10$$

$$2.56z_1 + z_2 = 177.2$$

$$5.76z_1 + 3.5z_2 + z_3 = 279.2$$

Langkah 2

- Hasil lengkap penyelesaian matriks $[Z]$ adalah

$$z_1 = 106.8$$

$$\begin{aligned} z_2 &= 177.2 - 2.56z_1 \\ &= 177.2 - 2.56(106.8) \\ &= -96.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= 279.2 - 5.76z_1 - 3.5z_2 \\ &= 279.2 - 5.76(106.8) - 3.5(-96.21) \\ &= 0.735 \end{aligned}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.21 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

Langkah 3

- Tentukan $[U][X] = [Z]$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.21 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

- Selesaikan matriks $[X]$, dengan menjadikan persamaan berikut:

$$25x_1 + 5x_2 + x_3 = 106.8$$

$$-4.8x_2 - 1.56x_3 = -96.21$$

$$0.7x_3 = 0.735$$

Langkah 3

- Dari persamaan ke-3: $0.7x_3 = 0.735$

$$x_3 = \frac{0.735}{0.7}$$

$$x_3 = 1.050$$

- Substitusi x_3 ke persamaan ke-2: $-4.8x_2 - 1.56x_3 = -96.21$

$$x_2 = \frac{-96.21 + 1.56x_3}{-4.8}$$

$$x_2 = \frac{-96.21 + 1.56(1.050)}{-4.8}$$

$$x_2 = 19.70$$

Langkah 3

- Substitusi x_3 dan x_2 ke persamaan ke-1:

$$25x_1 + 5x_2 + x_3 = 106.8$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{106.8 - 5x_2 - x_3}{25} \\ &= \frac{106.8 - 5(19.70) - 1.050}{25} \\ &= 0.2900\end{aligned}$$

Penyelesaian persamaan linier:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2900 \\ 19.70 \\ 1.050 \end{bmatrix}$$