Pertemuan ke-7

Persamaan Linier Simultan

25 Oktober 2012

# Metode Iterasi Gauss-Siedel

Dr.Eng. Agus S. Muntohar
Department of Civil Engineering



# Metode Gauss-Seidel

- Merupakan metode iterasi.
- Prosedur umum:
  - Selesaikan secara aljabar variabel tidak diketahui $x_i$ masing-masing persamaan linier
  - Asumsikan suatu nilai awal pada setiap penyelesaian
  - Selesaikan masing-masing $x_i$ dan ulangi
  - Hitung nilai mutlak dari kesalahan perkiraan relatif setelah masing-masing iterasi sehingga kurang dari nilai toleransi.

Dr.Eng. Agus S. Muntohar
Department of Civil Engineering

# Metode Gauss-Seidel

- Metode Gauss-Seidel Method membolehkan pengguna untuk mengkontrol *round-off error*.
- Metode eliminasi seperti Eliminasi Gauss dan Dekompoisi LU rentan terhadap *round-off error*.
- Juga, bila bentuk dari masalah dapat dipahami, dapat ditentukan nilai perkiraan awal yang lebih dekat, sehingga menghemat waktu iterasi.



# Metode Gauss-Seidel: Algoritma

- *n* persamaan dan *n* bilangan tak diketahui:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

- Jika element diagonal tidak nol, tuliskan kembali masing-masing persamaan untuk menyelesaikan bilangan yang tak diketahui.
- Misal:
  - Persamaan ke-1, untuk menyelesaian $x_1$,
  - Persamaan ke-2, untuk menyelesaikan $x_2$, dst.

# Metode Gauss-Seidel: Algoritma

- Tulis kembali persamaan:

$$x_1 = \frac{c_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ldots\ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$ ← Dari persamaan ke- 1

$$x_2 = \frac{c_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \ldots\ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$ ← Dari persamaan ke-2

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - a_{n-1,1}x_1 - a_{n-1,2}x_2 \ldots\ldots - a_{n-1,n-2}x_{n-2} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$ ← Dari persamaan ke-(n-1)

$$x_n = \frac{c_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots\ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$ ← Dari persamaan ke- n



# Metode Gauss-Seidel: Algoritma

- Bentuk umum persamaan yaitu:

$$x_1 = \frac{c_1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{1j}x_j}{a_{11}} \qquad x_{n-1} = \frac{c_{n-1} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n-1}}^{n} a_{n-1,j}x_j}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_2 = \frac{c_2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n} a_{2j}x_j}{a_{22}} \qquad x_n = \frac{c_n - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq n}}^{n} a_{nj}x_j}{a_{nn}}$$

# Metode Gauss-Seidel: Algoritma

- Bentuk umum untuk sembarang baris ke-'i'

$$x_i = \frac{c_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}, i = 1,2,\ldots,n.$$

Bagaimana dan dimana persamaan ini dapat digunakan?



# Metode Gauss-Seidel

- Selesaikan bilangan yang tidak diketahui.
- Asumsikan suatu nilai perkiraan untuk [X]

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Gunakan persamaan yang telah ditulis ulang untuk menyelesaiakn masing-masing nilai $x_i$.
- Penting:
  - ***Gunakan nilai terbaru $x_i$ untuk setiap iterasi persamaan berikutnya***.

# Metode Gauss-Seidel

- Hitung nilai absolut dari kesalahan relatif ($|\varepsilon_a|$):

$$\left|\in_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100$$

- Kapan jawaban akan diperoleh?
  - Hentikan iterasi bila nilai $|\varepsilon_a|$ kurang dari nilai kesalahan yang ditoleransikan untuk semua bilangan tidak diketahui tersebut.



# Metode Gauss-Seidel: Contoh 1

Kecepatan dorong sutau roket untuk tiga waktu berbeda adalah :

**Table 1** Velocity vs. Time data.

| Time, t (s) | Kecepatan, v (m/s) |
|---|---|
| 5 | 106.8 |
| 8 | 177.2 |
| 12 | 279.2 |

Data kecepatan pada Tabel 1 dapat didekati dengan persamaan polinomial berikut :

$$v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \,, 5 \le \mathrm{t} \le 12.$$

# Metode Gauss-Seidel: Contoh 1

1. Tuliskan persamaan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

2. Sistem persamaan menjadi:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

3. Perkirakan nilai awal:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$



# Metode Gauss-Seidel: Contoh 1

Tulis ulang persamaan:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64a_1 - a_3}{8}$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144a_1 - 12a_2}{1}$$

# Metode Gauss-Seidel: Contoh 1

Gunakan nilai perkiraan awal untuk menghitung $a_i$

Nilai awal:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5(2) - (5)}{25} = 3.6720$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64(3.6720) - (5)}{8} = -7.8510$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144(3.6720) - 12(-7.8510)}{1} = -155.36$$

Untuk menghitung $a_2$, berapa banyak nilai perkiraan awal yang diperlukan?



# Metode Gauss-Seidel: Contoh 1

Hitung nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif

$$\left|\in_a\right|_i = \left|\frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}}\right| \times 100$$

$$\left|\in_a\right|_1 = \left|\frac{3.6720 - 1.0000}{3.6720}\right| x100 = 72.76\%$$

$$\left|\in_a\right|_2 = \left|\frac{-7.8510 - 2.0000}{-7.8510}\right| x100 = 125.47\%$$

$$\left|\in_a\right|_3 = \left|\frac{-155.36 - 5.0000}{-155.36}\right| x100 = 103.22\%$$

Hasil iterasi ke-1 :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6720 \\ -7.8510 \\ -155.36 \end{bmatrix}$$

Nilai terbesar $|\varepsilon_a|$ adalah 125.47%

# Metode Gauss-Seidel: Contoh 1

Gunakan hasil dari iterasi ke-1: $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6720 \\ -7.8510 \\ -155.36 \end{bmatrix}$

Iterasi ke-2

Diperoleh nilai $a_i$ :

$$a_1 = \frac{106.8 - 5(-7.8510) - 155.36}{25} = 12.056$$

$$a_2 = \frac{177.2 - 64(12.056) - 155.36}{8} = -54.882$$

$$a_3 = \frac{279.2 - 144(12.056) - 12(-54.882)}{1} = -798.34$$



# Metode Gauss-Seidel: Contoh 1

Hitung nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif pada iterasi ke-2

$$|\in_a|_1 = \left|\frac{12.056 - 3.6720}{12.056}\right| x100 = 69.543\%$$

$$|\in_a|_2 = \left|\frac{-54.882 - (-7.8510)}{-54.882}\right| x100 = 85.695\%$$

$$|\in_a|_3 = \left|\frac{-798.34 - (-155.36)}{-798.34}\right| x100 = 80.540\%$$

Hasil iterasi ke-2 :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.056 \\ -54.882 \\ -798.54 \end{bmatrix}$$

Nilai terbesar $|\varepsilon_a|$ adalah 85.695%

# Metode Gauss-Seidel: Contoh 1

Hasil beberapa kali iterasi adalah sebagai berikut:

| Iterasi | $a_1$ | $\left\|\epsilon_a\right\|_1 \%$ | $a_2$ | $\left\|\epsilon_a\right\|_2 \%$ | $a_3$ | $\left\|\epsilon_a\right\|_3 \%$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.6720 | 72.767 | −7.8510 | 125.47 | −155.36 | 103.22 |
| 2 | 12.056 | 69.543 | −54.882 | 85.695 | −798.34 | 80.540 |
| 3 | 47.182 | 74.447 | −255.51 | 78.521 | −3448.9 | 76.852 |
| 4 | 193.33 | 75.595 | −1093.4 | 76.632 | −14440 | 76.116 |
| 5 | 800.53 | 75.850 | −4577.2 | 76.112 | −60072 | 75.963 |
| 6 | 3322.6 | 75.906 | −19049 | 75.972 | −249580 | 75.931 |

Catatan– Nilai kesalahan relatif tidak banyak berkurang pada setiap iterasi, termasuk pula tidak konvergen pada nilai sebenarnya.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.29048 \\ 19.690 \\ 1.0857 \end{bmatrix}$$



# Gauss-Seidel Method: Kelemahan

**Apa yang menyebabkan salah ?**

Walaupun penghitungan dilakukan dengan benar, hasilnya belum konvergen. Contoh 1 menunjukkan kelemahan dari Metode Gauss-Siedel: tidak semua sistem persamaan menghasilkan jawaban yang konvergen.

**Apakah solusinya?**

Satu dari sistem persamaan selalu konvergen dimana koefisien matriks adalah dominan diagonal, yaitu jika [A] dalam [A] [X] = [C] memenuhi kondisi :

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$ Untuk semua '*i*' dan $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$ paling tidak untuk ke-'i'

# Metode Gauss-Seidel: Contoh 2

Diberikan persamaan berikut:

$$12x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1$$

$$x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 28$$

$$3x_1 + 7x_2 + 13x_3 = 76$$

Koefisien matriksnya adalah :

$$[A] = \begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

Gunakan nilai perkiraan awal untuk iterasi ke-1 :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Apakah Metode Gauss-Siedel akan memberikan hasil yang konvergen?



# Metode Gauss-Seidel: Contoh 2

Cek apakah koefisien matriks dominan diagonal.

$$[A] = \begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix}$$

$$|a_{11}| = |12| = 12 \geq |a_{12}| + |a_{13}| = |3| + |-5| = 8$$

$$|a_{22}| = |5| = 5 \geq |a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |3| = 4$$

$$|a_{33}| = |13| = 13 \geq |a_{31}| + |a_{32}| = |3| + |7| = 10$$

Semua koefisien matriks tidak sama, dan salah satu baris bernilai lebih besar.

Oleh karen itu: Penyelesaian dengan Metode Gauss-Siedel akan konvergen.

# Metode Gauss-Seidel: Contoh 2

Tulis kembali persamaan:

$$\begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 28 \\ 76 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1 - 3x_2 + 5x_3}{12}$$

$$x_2 = \frac{28 - x_1 - 3x_3}{5}$$

$$x_3 = \frac{76 - 3x_1 - 7x_2}{13}$$

Dengan nilai awal, lakukan iterasi ke-1:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1 - 3(0) + 5(1)}{12} = 0.50000$$

$$x_2 = \frac{28 - (0.5) - 3(1)}{5} = 4.9000$$

$$x_3 = \frac{76 - 3(0.50000) - 7(4.9000)}{13} = 3.0923$$



# Metode Gauss-Seidel: Contoh 2

Nilai absolut kesalahan relatif:

$$\left|\in_a\right|_1 = \left|\frac{0.50000 - 1.0000}{0.50000}\right| \times 100 = 100.00\%$$

$$\left|\in_a\right|_2 = \left|\frac{4.9000 - 0}{4.9000}\right| \times 100 = 100.00\%$$

$$\left|\in_a\right|_3 = \left|\frac{3.0923 - 1.0000}{3.0923}\right| \times 100 = 67.662\%$$

Nilai terbesar dari kesalahan relatif adalah 100%

# Metode Gauss-Seidel: Contoh 2

Hasil iterasi ke-1

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 4.9000 \\ 3.0923 \end{bmatrix}$$

Substitusi nilai x ke persamaan :

$$x_1 = \frac{1 - 3(4.9000) + 5(3.0923)}{12} = 0.14679$$

$$x_2 = \frac{28 - (0.14679) - 3(3.0923)}{5} = 3.7153$$

$$x_3 = \frac{76 - 3(0.14679) - 7(4.900)}{13} = 3.8118$$

Hasil Iterasi ke-2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.14679 \\ 3.7153 \\ 3.8118 \end{bmatrix}$$



# Metode Gauss-Seidel: Contoh 2

Nilai absolut dari kesalahan relatif pada Iterasi ke-2

$$\left|\in_a\right|_1 = \left|\frac{0.14679 - 0.50000}{0.14679}\right| \times 100 = 240.61\%$$

$$\left|\in_a\right|_2 = \left|\frac{3.7153 - 4.9000}{3.7153}\right| \times 100 = 31.889\%$$

$$\left|\in_a\right|_3 = \left|\frac{3.8118 - 3.0923}{3.8118}\right| \times 100 = 18.874\%$$

Nilai terbesar dari kesalahan relatif adalah 240.61%, yaitu lebih besar dari hasil Iterasi ke-1.

Apakah ini bermasalah?

# Metode Gauss-Seidel: Contoh 2

Lanjutkan Iterasi dan diperoleh hasil:

| Iterasi | $a_1$ | $\lvert\in_a\rvert_1 \%$ | $a_2$ | $\lvert\in_a\rvert_2 \%$ | $a_3$ | $\lvert\in_a\rvert_3 \%$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.50000 | 100.00 | 4.9000 | 100.00 | 3.0923 | 67.662 |
| 2 | 0.14679 | 240.61 | 3.7153 | 31.889 | 3.8118 | 18.876 |
| 3 | 0.74275 | 80.236 | 3.1644 | 17.408 | 3.9708 | 4.0042 |
| 4 | 0.94675 | 21.546 | 3.0281 | 4.4996 | 3.9971 | 0.65772 |
| 5 | 0.99177 | 4.5391 | 3.0034 | 0.82499 | 4.0001 | 0.074383 |
| 6 | 0.99919 | 0.74307 | 3.0001 | 0.10856 | 4.0001 | 0.00101 |

Hasil akhir Iterasi : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99919 \\ 3.0001 \\ 4.0001 \end{bmatrix}$

Hasil penyelesaian eksak . $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$