



Pertemuan ke-5
Persamaan Linier Simultan

11 Oktober 2012

Metode Eliminasi Gauss (Gaussian Elimination)

Metode Eliminasi Gauss

- Suatu metode untuk menyelesaikan persamaan linier simultan dari $[A][X]=[C]$
- Dua langkah penyelesaian:
 - Eliminasi maju (Forward Elimination)
 - Substitusi balik (Back Substitution)

Eliminasi Maju

- Hasil akhir dari eliminasi maju adalah mengubah koefisien matriks menjadi matriks segitiga atas.

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.21 \\ 0.735 \end{bmatrix}$$

Dr.Eng. Agus S. Muntohar Department
of Civil Engineering

3

Eliminasi Maju

Sepasang n persamaan dan n variabel yang tidak diketahui

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

($n-1$) langkah eliminasi maju

Dr.Eng. Agus S. Muntohar Department
of Civil Engineering

4

Eliminasi Maju: 3 Persamaan dengan 3 Variabel Tidak Diketahui

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad (2)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad (3)$$

Eliminasi Maju: Langkah 1-a

- Bagi persamaan (1) dengan a_{11} dan dikalikan dengan a_{21}

$$\left[\frac{a_{21}}{a_{11}} \right] (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1)$$
$$a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}x_3 = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \quad (4)$$

Eliminasi Maju: Langkah 1-b

- Kurangkan persamaan (4) dengan persamaan (2):

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad (2)$$

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}x_3 = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \quad (4)$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} \right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13} \right) x_3 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \quad (5)$$

Dr.Eng. Agus S. Muntohar Department
of Civil Engineering

7

Eliminasi Maju: Langkah 1-c

- Ulangi seperti Langkah 1 untuk persamaan (3), dengan membagi persamaan (1) dengan a_{11} dan dikalikan dengan a_{31} :

$$\left[\frac{a_{31}}{a_{11}} \right] (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1)$$

$$a_{31}x_1 + a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1 \quad (6)$$

Langkah 1 Selesai

Dr.Eng. Agus S. Muntohar Department
of Civil Engineering

8

Eliminasi Maju: Langkah 1-d

- Ulangi seperti Langkah 2 untuk persamaan (3), persamaan (6) dengan persamaan (3): :

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad (3)$$

$$a_{31}x_1 + a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = a_{31} \frac{b_1}{a_{11}} \quad (6)$$

$$\left(a_{32} - a_{31} \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{33} - a_{31} \frac{a_{13}}{a_{11}} \right) x_3 = \left(b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} b_1 \right)$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \quad (7)$$

Langkah 1 Selesai

Dr.Eng. Agus S. Muntohar Department
of Civil Engineering

9

Hasil Langkah 1

- Langkah 1 menghasilkan persamaan berikut :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (1)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \quad (5)$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \quad (7)$$

- Masih terdapat 2 variabel tidak diketahui pada persamaan (5) dan (7), sehingga salah satunya harus dieliminasi.

Dr.Eng. Agus S. Muntohar Department
of Civil Engineering

10

Eliminasi Maju

- Untuk sistem n persamaan, maka Langkah 1a hingga 1d akan menghasilkan :

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\&\vdots \\&\vdots \\&\vdots \\a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \dots + a'_{nn}x_n &= b'_n\end{aligned}$$

Eliminasi Maju: Langkah 2-a

- Eliminasi x_2 pada persamaan (5) dengan cara membaginya dengan a'_{22} dan mengalikannya dengan a'_{32} :

$$\begin{aligned}\left[\frac{a'_{32}}{a'_{22}} \right] (a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2) \\a'_{32}x_2 + a'_{32} \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2\end{aligned} \quad (8)$$

Eliminasi Maju: Langkah 2-b

- Kurangkan persamaan (8) pada persamaan (7):

$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \quad (7)$$

$$a'_{32}x_2 + a'_{32} \frac{a'_{23}}{a'_{22}} x_3 = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2 \quad (8)$$

$$\left(a'_{33} - a'_{32} \frac{a'_{23}}{a'_{22}} \right) x_3 = \left(b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2 \right)$$

$$a''_{32}x_2 + a''_{33}x_3 = b''_3 \quad (9)$$

Hasil Langkah 2

- Langkah 2 menghasilkan persamaan berikut :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (1)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \quad (5)$$

$$a''_{33}x_3 = b''_3 \quad (9)$$

- Persamaan baru tersebut memiliki elemen matriks berupa matriks segitiga atas.

Eliminasi Maju

- Untuk sistem n persamaan, maka Langkah 1 akan menghasilkan :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

$$\vdots$$

$$a''_{n3}x_3 + \dots + a''_{nn}x_n = b''_n$$

Eliminasi Maju

Pada tahap akhir langkah ke $(n-1)$ eliminasi maju, sistem persamaan akan menghasilkan

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3$$

$$\vdots$$

$$a^{(n-1)}_{nn}x_n = b^{(n-1)}_n$$

Bentuk Matriks hasil Eliminasi Maju

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b^{(n-1)}_n \end{bmatrix}$$

Substitusi Balik: Langkah 3-a

- Dari sistem persamaan hasil Langkah 2, hitung variabel yang tidak diketahui dari persamaan yang terakhir yaitu :

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}} \quad (10)$$

- Atau untuk n persamaan:

$$x_n = \frac{b^{(n-1)}_n}{a^{(n-1)}_{nn}}$$

Substitusi Balik: Langkah 3-b

- Hitung variabel tidak diketahui lainnya dari persamaan (5) dan (1), yaitu :

$$x_2 = \frac{b_2' - a_{23}'x_3}{a_{22}'} \quad (11)$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \quad (12)$$

Substitusi Balik

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - a_{i,i+1}^{(i-1)}x_{i+1} - a_{i,i+2}^{(i-1)}x_{i+2} - \dots - a_{i,n}^{(i-1)}x_n}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

Untuk $i = n-1, \dots, 1$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)}x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

Untuk $i = n-1, \dots, 1$

Metode Eliminasi Gauss

Contoh Penggunaan

Contoh 1

Kecepatan dorong roket pada tiga waktu berbeda sebagai berikut :

Tabel 1 Data Kecepatan vs. waktu.

| Waktu t (s) | Kecepatan v (m/s) |
|---------------|---------------------|
| 5 | 106.8 |
| 8 | 177.2 |
| 12 | 279.2 |



Data kecepatan tersebut didekati dengan persamaan polinomial berikut: $v(t) = a_1t^2 + a_2t + a_3$, $5 \leq t \leq 12$.

Tentukan kecepatan pada saat $t = 6$ detik!

Contoh 1 Cont.

Sistem persamaan $v(t) = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$, $5 \leq t \leq 12$.

Dalam bentuk matriks dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Digunakan data dari Tabel 1, maka :

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Contoh 1 Cont.

Bentuk matriks Contoh 1:

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & 279.2 \end{array} \right]$$

Eliminasi Maju

Jumlah Langkah Eliminasi Maju: $(n-1) = (3-1) = 2$

Langkah 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & 279.2 \end{array} \right]$$

Bagi persamaan ke-1 dengan 25 dan dikalikan dengan 64,
yaitu :

$$\left[25 \quad 5 \quad 1 \mid 106.8 \right] \times \frac{64}{25} = \left[64 \quad 12.8 \quad 2.56 \mid 273.408 \right]$$

Kurangkan ke persamaan
ke-2

$$\begin{array}{r} \left[64 \quad 8 \quad 1 \mid 177.2 \right] \\ - \left[64 \quad 12.8 \quad 2.56 \mid 273.408 \right] \\ \hline \left[0 \quad -4.8 \quad -1.56 \mid -96.208 \right] \end{array}$$

Hasil persamaan baru adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & -96.208 \\ 144 & 12 & 1 & 279.2 \end{array} \right]$$

Langkah 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 64 & 8 & 1 & 177.2 \\ 144 & 12 & 1 & 279.2 \end{array} \right]$$

Bagi persamaan ke-1 dengan 25 dan dikalikan dengan 144, yaitu :

$$\left[25 \quad 5 \quad 1 \mid 106.8 \right] \times \frac{144}{25} = \left[144 \quad 28.8 \quad 5.76 \mid 615.168 \right]$$

Kurangkan ke
persamaan ke-3

$$\begin{array}{r} \left[144 \quad 12 \quad 1 \mid 279.2 \right] \\ - \left[144 \quad 22.8 \quad 5.76 \mid 615.168 \right] \\ \hline \left[0 \quad -16.8 \quad -4.76 \mid -335.968 \right] \end{array}$$

Hasil persamaan baru adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & -335.968 \end{array} \right]$$

Langkah 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & -96.208 \\ 0 & -16.8 & -4.76 & -335.968 \end{array} \right]$$

Bagi persamaan ke-2 dengan -4.8 dan dikalikan dengan -16.8, yaitu :

$$\left[0 \quad -4.8 \quad -1.56 \mid -96.208 \right] \times \left(\frac{-16.8}{-4.8} \right) = \left[0 \quad -16.8 \quad -5.46 \mid -336.728 \right]$$

Kurangkan ke
persamaan ke-3

$$\begin{array}{r} \left[0 \quad -16.8 \quad -4.76 \mid -335.968 \right] \\ - \left[0 \quad -16.8 \quad -5.46 \mid -336.728 \right] \\ \hline \left[0 \quad 0 \quad 0.7 \mid 0.76 \right] \end{array}$$

Hasil persamaan baru untuk
persamaan 3 adalah

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & -96.208 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.76 \end{array} \right]$$

Substitusi Balik

Substitusi Balik

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 106.8 \\ 0 & -4.8 & -1.56 & -96.208 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.76 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian untuk a_3 $0.7a_3 = 0.76$

$$a_3 = \frac{0.76}{0.7}$$

$$a_3 = 1.08571$$

Back Substitution (cont.)

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.208 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian untuk a_2

$$-4.8a_2 - 1.56a_3 = -96.208$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56a_3}{-4.8}$$

$$a_2 = \frac{-96.208 + 1.56 \times 1.08571}{-4.8}$$

$$a_2 = 19.6905$$

Back Substitution (cont.)

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ -96.2 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian untuk a_1

$$25a_1 + 5a_2 + a_3 = 106.8$$

$$a_1 = \frac{106.8 - 5a_2 - a_3}{25}$$

$$= \frac{106.8 - 5 \times 19.6905 - 1.08571}{25}$$

$$= 0.290472$$

Hasil Eliminasi Gauss Contoh 1

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

Contoh 1 Cont.

Hasil penyelesaian vektor
kecepatan adalah :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.290472 \\ 19.6905 \\ 1.08571 \end{bmatrix}$$

Persamaan kecepatan dituliskan menjadi :

$$\begin{aligned} v(t) &= a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \\ &= 0.290472 t^2 + 19.6905 t + 1.08571, \quad 5 \leq t \leq 12 \end{aligned}$$

Untuk $t = 6$ s, maka :

$$\begin{aligned} v(6) &= 0.290472(6)^2 + 19.6905(6) + 1.08571 \\ &= 129.686 \text{ m/s.} \end{aligned}$$