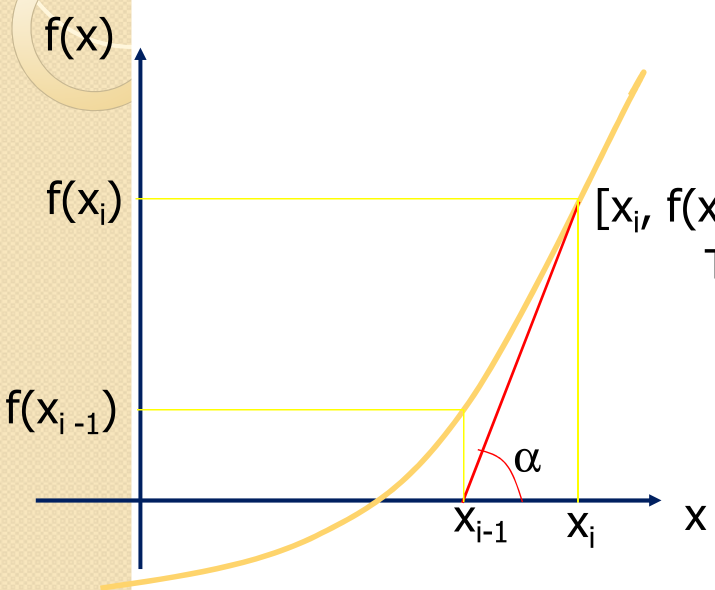
Analisa Terapan: Metode Numerik

Pertemuan ke-4

Persamaan Non-Linier: Metode Secant

4 Oktober 2012

Metode Secant – Dasar



Gambar 1 Ilustrasi geomentri metode Newton-Raphson.

Dalam Metode Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (1)$$

Turunan $f'(x_i)$ didekati dengan

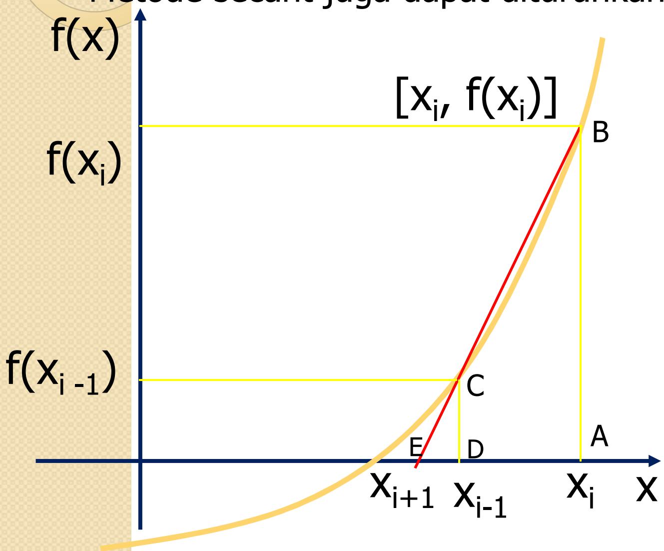
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad (2)$$

Substitusi Persamaan (2) ke dalam Persamaan (1) menghasilkan metode Secant:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Metode Secant – Dasar

Metode secant juga dapat diturunkan secara geometrik:



Gambar 2 Ilustrasi geometri metode Secant

Segitiga sebangun pada Gambar 2

$$\frac{AB}{AE} = \frac{DC}{DE}$$

Dapat dituliskan menjadi:

$$\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1} - x_{i+1}}$$

Atau dapat dituliskan kembali menjadi :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Persamaan Non-Linier: Metode Secant

ALGORITMA METODE SECANT

Langkah 1

- Pilih dua nilai perkiraan awal untuk menghitung nilai perkiraan x_{i+1}:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

- Hitung nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif:

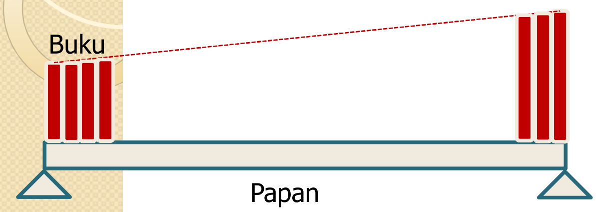
$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \times 100$$

Langkah 2

- Cek jika nilai $|\varepsilon_a|$ lebih besar dari nilai toleransi ε_s.
  - Jika benar, maka kembali ke Langkah 1
  - Jika tidak, maka hentikan hitungan.
- Cek pula jika jumlah iterasi melebihi batas maksimum iterasi yang ditetapkan.

Contoh 1

Suatu papan kayu sepanjang 29 in menerima beban berupa susunan buku-buku yang memiliki tinggi bervariasi dari 8 ½ hingga 11 in. Ukuran papan adalah 3/8 in tebal dan lebar 12 in. Modulus Elastisitas papan kayu terebut adalah 3.667 Msi (mega square inch). Tentukan defleksi vertikal maksimum papan kayu tersebut, bila defleksi vertikal mengikuti persamaan berikut:



Gambar 2 Papan yang dibebani buku.

$v(x) = -0.13533\times10^{-8}\, x^5 - 0.66722\times10^{-6}\, x^4 + 0.42493\times10^{-4}\, x^3 - 0.018507x$

x adalah jarak dimana terjadi defleksi maksimum. Defleksi maksimum diperoleh dari $f(x) = \frac{dv}{dx} = 0$

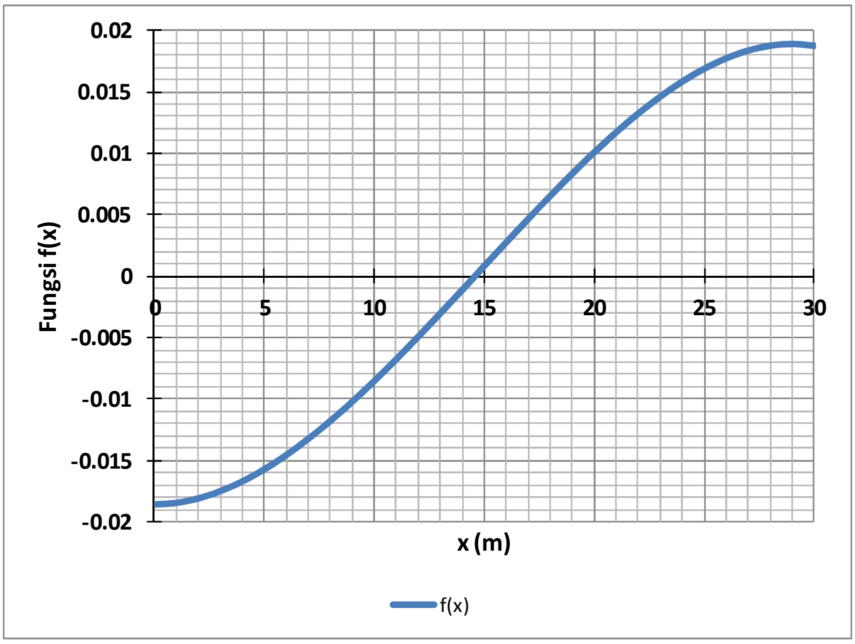
Contoh 1 (Cont.)

Letak x yang memberikan defleksi maksimum diberikan dengan persamaan

$f'(x) = -0.67665\times10^{-8}\, x^4 - 0.26689\times10^{-5}\, x^3 + 0.12748\times10^{-3}\, x^2 - 0.018509 = 0$

Catatan:
Akar-akar persamaan dicari dengan 3 kali iterasi.
Diperlukan turunan kedua dari ***v(x)*** untuk menghitung akar persamaan menggunakan metode Newton - Raphson
Nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif dihitung pada setiap akhir iterasi.
Jumlah digit penting ditentukan pada iterasi terakhir.

Contoh1 (Cont.)



Gambar 3 Grafik fungsi f(x).

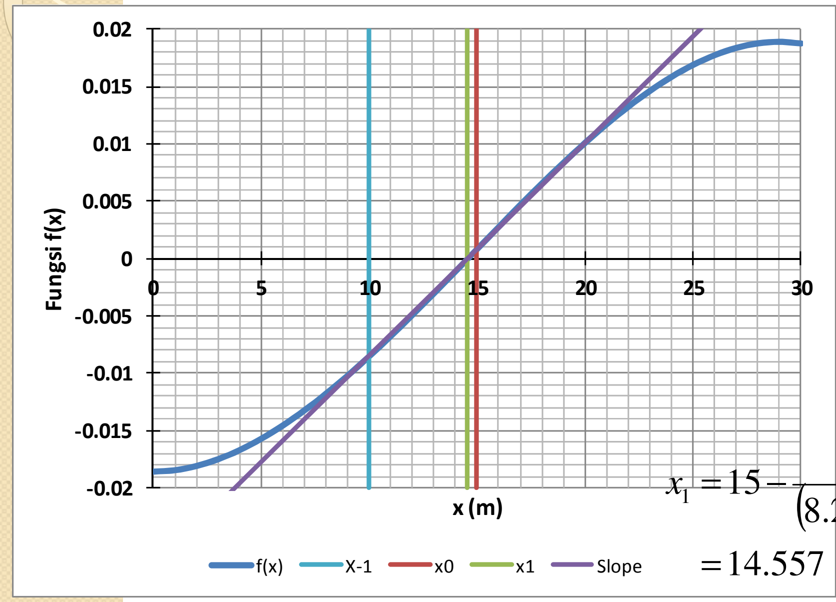
$$f(x) = -0.67665\text{x}10^{-8}x^4 - 0.26689\text{x}10^{-5}x^3 + 0.12748\text{x}10^{-3}x^2 - 0.018507 = 0$$

Contoh1 (Cont.) - Solusi

- Diambil nilai perkiraan awal untuk fungsi $f(x) = 0$, $x_{-1} = 10$ dan $x_0 = 15$.
- Iterasi 1: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)(x_0 - x_{-1})}{f(x_0) - f(x_{-1})}$

$$f(x_0) = -0.67665\times10^{-8}x_0^4 - 2.6689\times10^{-5}x_0^3 + 0.12748\times10^{-3}x_0^2 - 0.018507$$
$$= -0.67665\times10^{-8}(15)^4 - 2.6689\times10^{-5}(15)^3 + 0.12748\times10^{-3}(15)^2 - 0.018507$$
$$= 8.2591\times10^{-4}$$
$$f(x_{-1}) = -0.67665\times10^{-8}x_{-1}^4 - 2.6689\times10^{-5}x_{-1}^3 + 0.12748\times10^{-3}x_{-1}^2 - 0.018507$$
$$= -0.67665\times10^{-8}(10)^4 - 2.6689\times10^{-5}(10)^3 + 0.12748\times10^{-3}(10)^2 - 0.018507$$
$$= -8.4956\times10^{-3}$$

Contoh1 (Cont.) - Solusi



$$x_1 = 15 - \frac{\left(8.2591\times10^{-4}\right)(15-10)}{\left(8.2591\times10^{-4}\right) - \left(-8.4956\times10^{-3}\right)}$$

$$= 14.557$$

Gambar 4 Grafik hasil iterasi 1

Contoh1 (Cont.) - Solusi

- Nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif $|\varepsilon_a|$ dari hasil Iterasi 1 adalah :

$$|\in_a| = \left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{14.557 - 15}{14.557}\right| \times 100$$

$$= 3.0433\%$$

- Jumlah digit penring adalah 1, karena $|\varepsilon_a| < 5\%$

Contoh1 (Cont.) - Solusi

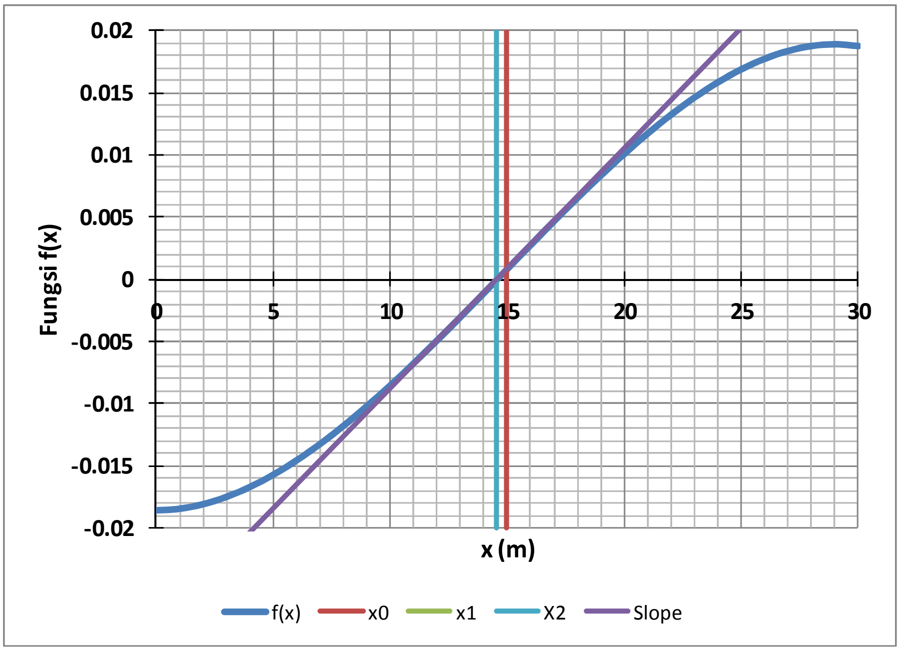
- Iterasi 2: Perkiraan akar persamaan berikutnya menggunakan nilai x_0 = 15 dan x_1 = 14.557

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= -0.67665\times10^{-8} x_1^4 - 2.6689\times10^{-5} x_1^3 + 0.12748\times10^{-3} x_1^2 - 0.018507 \\ &= -0.67665\times10^{-8}(14.557)^4 - 2.6689\times10^{-5}(14.557)^3 + 0.12748\times10^{-3}(14.557)^2 - 0.018507 \\ &= -2.9870\times10^{-5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 15 - \frac{(-2.9870\times10^{-5})(14.557-15)}{(-2.9870\times10^{-5}) - (8.2591\times10^{-4})} \\ &= 14.572 \end{aligned}$$

Contoh1 (Cont.) - Solusi



Gambar 5 Grafik hasil iterasi 2

Contoh1 (Cont.) - Solusi

- Nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif $|\varepsilon_a|$ dari hasil Iterasi 2 adalah :

$$|\in_a| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{14.572 - 14.557}{14.572}\right| \times 100$$

$$= 0.10611\%$$

- Jumlah digit penring adalah 2, karena $|\varepsilon_a|$ < 0.5%

Contoh1 (Cont.) - Solusi

- Iterasi 3: Perkiraan akar persamaan berikutnya menggunakan nilai x_1 = 14.557 dan x_2 = 14.572

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

$$f(x_2) = -0.67665\times10^{-8} x_2^4 - 2.6689\times10^{-5} x_2^3 + 0.12748\times10^{-3} x_2^2 - 0.018507$$

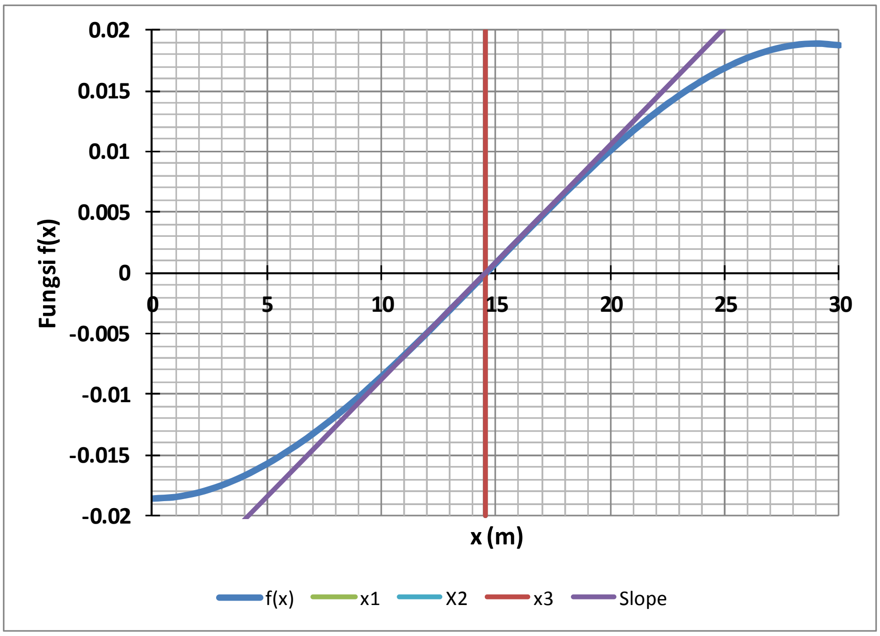
$$= -0.67665\times10^{-8}(14.572)^4 - 2.6689\times10^{-5}(14.572)^3 + 0.12748\times10^{-3}(14.572)^2 - 0.018507$$

$$= -6.0676\times10^{-9}$$

$$x_3 = 14.572 - \frac{(-6.0676\times10^{-9})(14.572 - 14.557)}{(-6.0676\times10^{-9}) - (-2.9870\times10^{-5})}$$

$$= 14.572$$

Example 1 Cont.



Gambar 6 Grafik hasil iterasi 3

Example 1 Cont.

The absolute relative approximate error $|\in_a|$ at the end of Iteration 3 is

$$|\in_a| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{14.572 - 14.572}{14.572}\right| \times 100$$

$$= 2.1559 \times 10^{-5}\%$$

The number of significant digits at least correct is 6, because the absolute relative approximate error is less than 0.00005%.

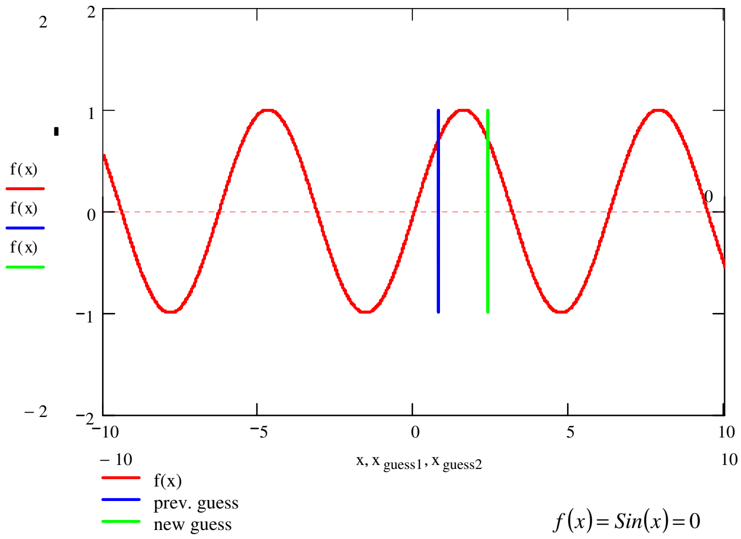
Resume Iterasi Contoh 1

Ite-rasi	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	$\lvert\varepsilon_a\rvert$ %
1	10	15	14.557	-8.4956×10^{-3}	8.2591×10^{-4}	-2.987×10^{-5}	3.0433
2	15	14.557	14.572	8.2591×10^{-4}	-2.987×10^{-5}	-6.0676×10^{-9}	0.10611
3	14.557	14.572	14.572	-2.987×10^{-5}	-6.0676×10^{-9}	-6.0676×10^{-9}	2.1559×10^{-5}

Kelebihan

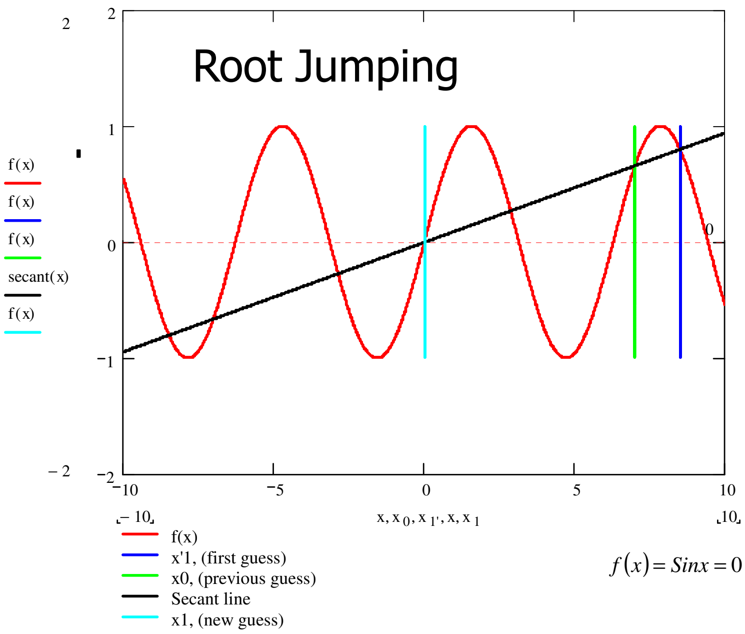
- Konvergensi yang diraih lebih cepat, jika diperoleh nilai yang konvergen
- Memakai dua nilai perkiraan yang tidak memerlukan akar yang disimpan

Kekurangan: Pembagian nol



$f(x) = Sin(x) = 0$

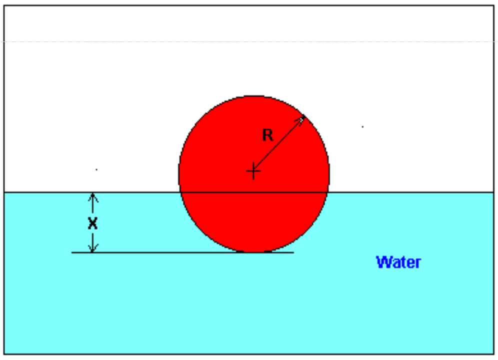
Kekurangan: Lompatan Akar



$f(x) = Sinx = 0$

Contoh 2

- Suatu bola terapung seperti Gambar 6 memiliki berat jenis 0.6 dan jari-jari 5.5 cm. Tentukan kedalaman bola yang teren



Gambar 7 Diagram bola terapung

Contoh 2 (Cont.)

- Kedalaman bola yang terendam air x dinyatakan dengan persamaan berikut
- $$x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4} = 0$$

a) Gunakan metode Secant untuk menentukan akar-akar persamaan kedalaman bola yang terendam air x. Lakukan tiga kali iterasi untuk memperkirakan akar-akar persamaan terebut.

b) Tentukan nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif pada masing-masing iterasi, dan jumlah digit pentingnya.

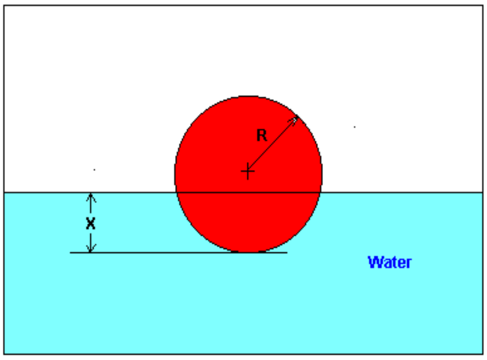
Contoh 2 (Cont.)

Secara fisik, bagian bola yang terendam air memiliki kedalaman antara x = 0 dan x = 2R,

dengan R = jari-jari bola,

yaitu

$$0 \le x \le 2R$$
$$0 \le x \le 2(0.055)$$
$$0 \le x \le 0.11$$

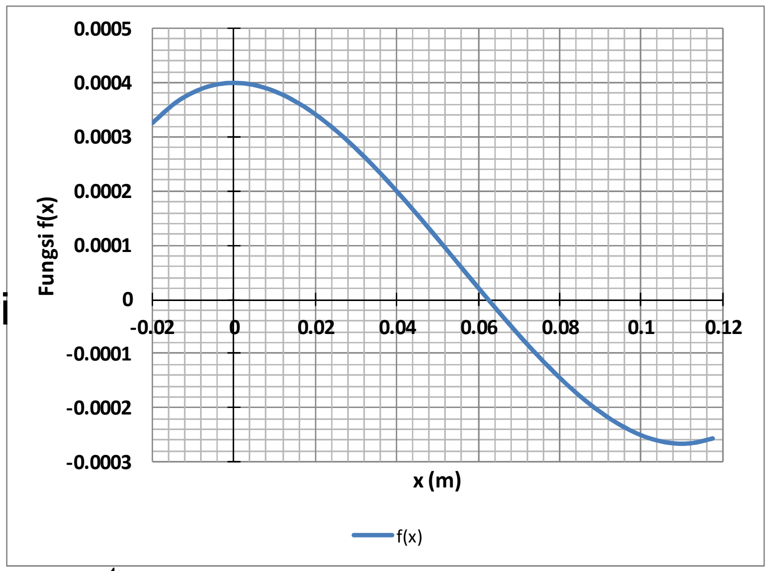


Gambar 7 Diagram bola terapung

Contoh 2 (Cont.) – Solusi

Penyelesaian:

Untuk membantu pemahaman tentang bagaimana metode ini digunakan untuk mencari akar-akar persamaan, ditampilkan grafik fungsi f(x), dimana



$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4}$$

Gambar 8 Grafik dari fungsi f(x)

Contoh 2 (Cont.) – Solusi

- Asumsikan nilai perkiraan awal dari f(x) = 0 pada x_{-1} = 0.02 dan x_0 = 0.05
- Iterasi 1: Akar persamaan dihitung dengan

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(x_0 - x_{-1})}{f(x_0) - f(x_{-1})}$$

$$= 0.05 - \frac{\left(0.05^3 - 0.165(0.05)^2 + 3.993\times 10^{-4}\right)(0.05 - 0.02)}{\left(0.05^3 - 0.165(0.05)^2 + 3.993\times 10^{-4}\right) - \left(0.02^3 - 0.165(0.02)^2 + 3.993\times 10^{-4}\right)}$$

$$= 0.06461$$

Contoh 2 (Cont.) – Solusi

The absolute relative approximate error $|\in_a|$ at the end of Iteration 1 is

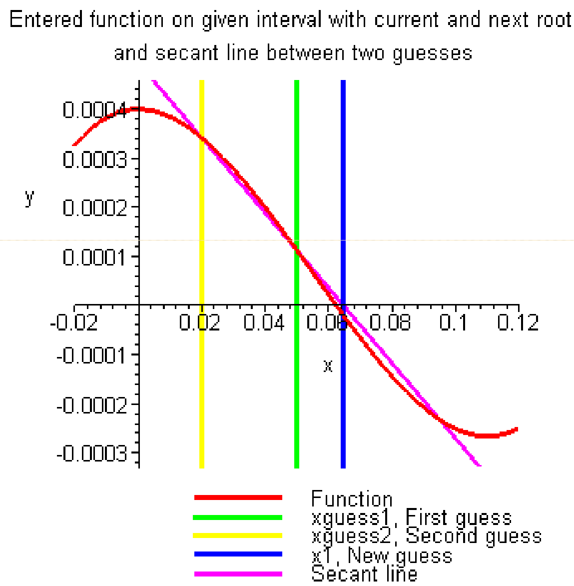
$$|\in_a| = \left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{0.06461 - 0.05}{0.06461}\right| \times 100$$

$$= 22.62\%$$

The number of significant digits at least correct is 0, as you need an absolute relative approximate error of 5% or less for one significant digits to be correct in your result.

Contoh 2 (Cont.) – Solusi



Gambar 9 Graph of results of Iteration 1.

Example 1 Cont.

Iteration 2

The estimate of the root is

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$= 0.06461 - \frac{\left(0.06461^3 - 0.165(0.06461)^2 + 3.993\times10^{-4}\right)(0.06461 - 0.05)}{\left(0.06461^3 - 0.165(0.06461)^2 + 3.993\times10^{-4}\right) - \left(0.05^3 - 0.165(0.05)^2 + 3.993\times10^{-4}\right)}$$

$$= 0.06241$$

Example 1 Cont.

The absolute relative approximate error $|\in_a|$ at the end of Iteration 2 is

$$|\in_a| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{0.06241 - 0.06461}{0.06241}\right| \times 100$$

$$= 3.525\%$$

The number of significant digits at least correct is 1, as you need an absolute relative approximate error of 5% or less.

Example 1 Cont.

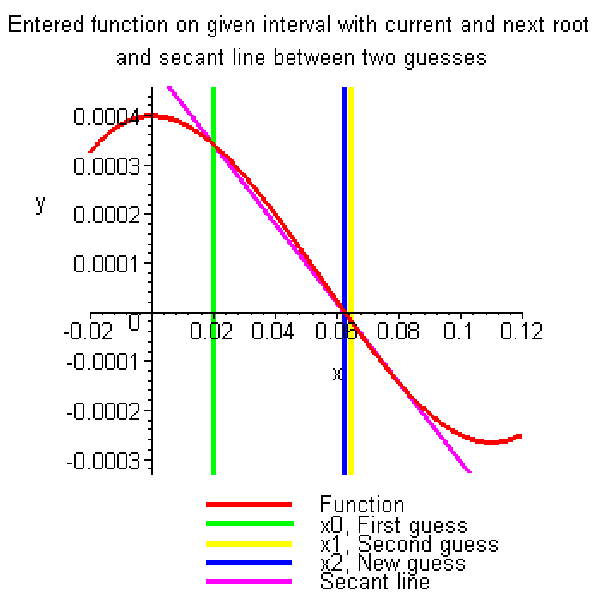


Figure 6 Graph of results of Iteration 2.

Example 1 Cont.

<u>Iteration 3</u>
The estimate of the root is

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$
$$= 0.06241 - \frac{\left(0.06241^3 - 0.165(0.06241)^2 + 3.993\times10^{-4}\right)(0.06241 - 0.06461)}{\left(0.06241^3 - 0.165(0.06241)^2 + 3.993\times10^{-4}\right) - \left(0.05^3 - 0.165(0.06461)^2 + 3.993\times10^{-4}\right)}$$
$$= 0.06238$$

Example 1 Cont.

The absolute relative approximate error $|\in_a|$ at the end of Iteration 3 is

$$|\in_a| = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| \times 100$$
$$= \left|\frac{0.06238 - 0.06241}{0.06238}\right| \times 100$$
$$= 0.0595\%$$

The number of significant digits at least correct is 5, as you need an absolute relative approximate error of 0.5% or less.

Iteration #3

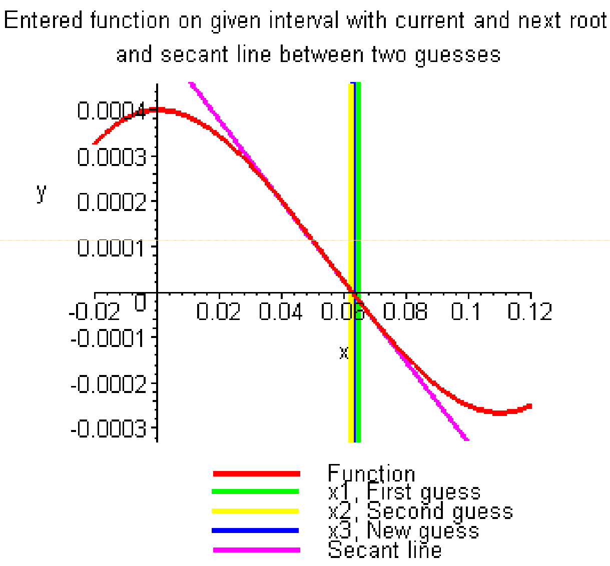


Figure 7 Graph of results of Iteration 3.