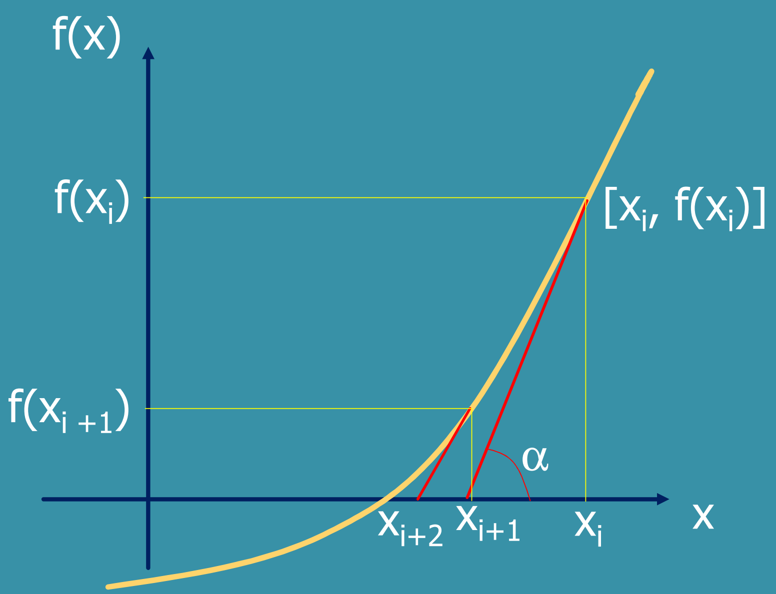
Pertemuan ke-4

Analisa Terapan: Metode Numerik

4 Oktober 2012

Persamaan Non-Linier: Metode Newton-Raphson

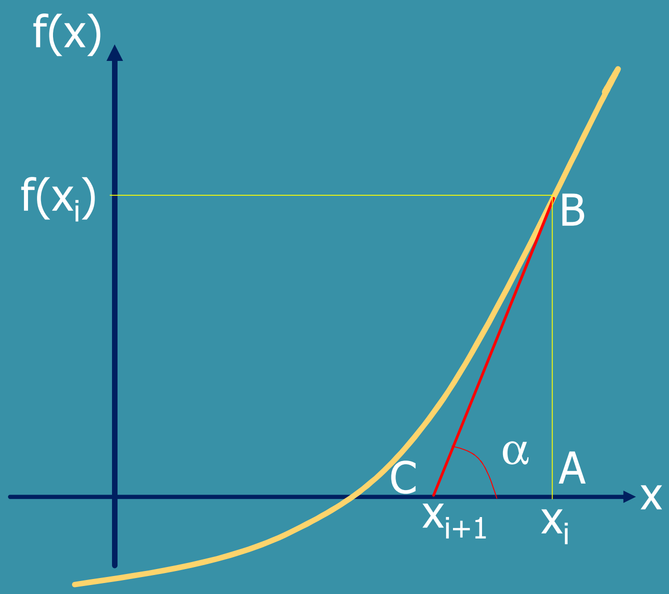
Metode Newton-Raphson



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Gambar 1 Ilustrasi geometrik metode Newton-Raphson.

Derivasi



$$\tan(\alpha) = \frac{AB}{AC}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Gambar 2 Derivasi metode Newton-Raphson.

Pertemuan ke-4

Persamaan Non-Linier: Metode Newton-Raphson

Algoritma Metode Newton-Raphson

Langkah 1

- Evaluasi f(x) secara simbolik
- Asumsi nilai awal dari akar persamaan $\boldsymbol{x_i}$

Langkah 2

Tetapkan suatu nilai perkiraan awal dari akar persamaan x_i untuk memperkirakan nilai baru akar persamaan x_{i+1} sebagai

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

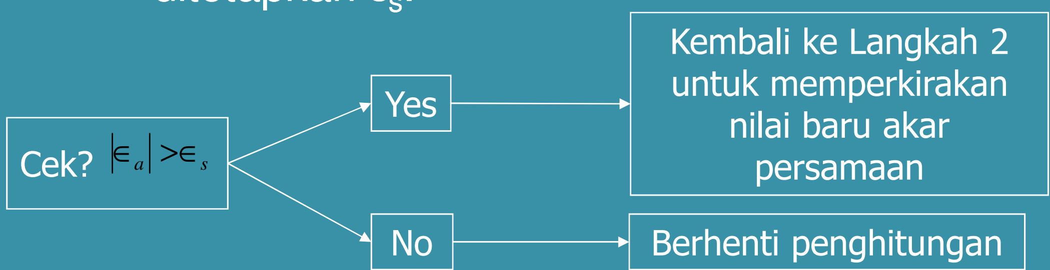
Langkah 3

Hitung nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif $|\varepsilon_a|$

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \times 100$$

Langkah 4

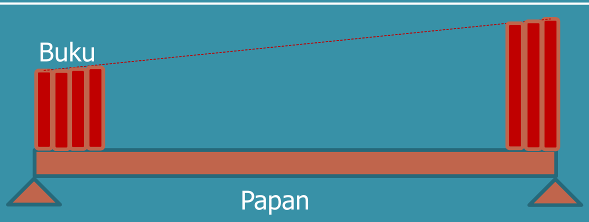
Bandingkan nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif dengan nilai toleransi kesalahan yang ditetapkan ε_s.



Bila jumlah iterasi melebihi batas maksimum iterasi, maka penghitungan dapat dihentikan.

Contoh 1

Suatu papan kayu sepanjang 29 in menerima beban berupa susunan buku-buku yang memiliki tinggi bervariasi dari 8 ½ hingga 11 in. Ukuran papan adalah 3/8 in tebal dan lebar 12 in. Modulus Elastisitas papan kayu terebut adalah 3.667 Msi (mega square inch). Tentukan defleksi vertikal maksimum papan kayu tersebut, bila defleksi vertikal mengikuti persamaan berikut:



Gambar 2 Papan yang dibebani buku.

$v(x)$ = -0.13533x10^{-8} x^5 – 0.66722x10^{-6} x^4 + 0.42493x10^{-4} x^3 – 0.018507x

x adalah jarak dimana terjadi defleksi maksimum. Defleksi maksimum diperoleh dari $f(x) = \dfrac{dv}{dx} = 0$

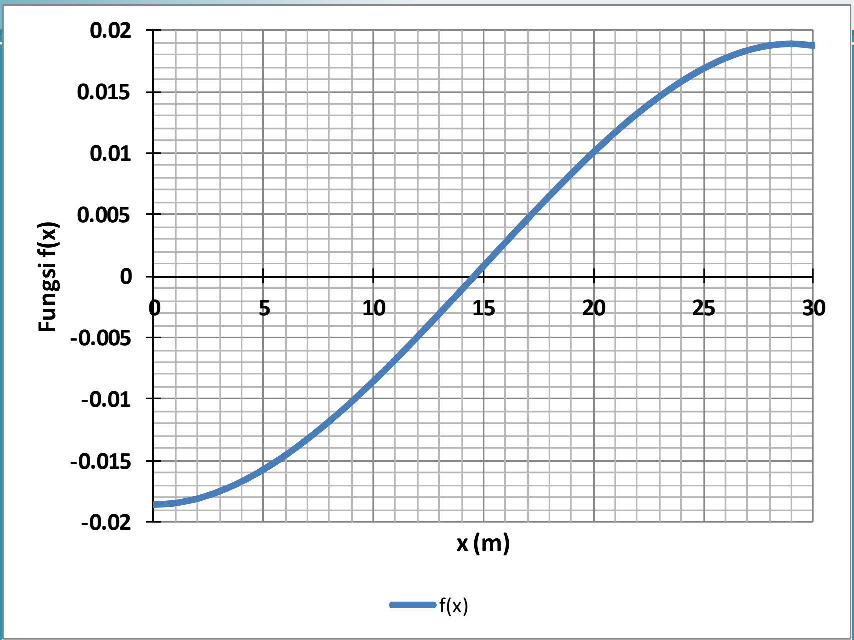
Contoh 1 (Cont.)

Letak x yang memberikan defleksi maksimum diberikan dengan persamaan

f'(x) = -0.67665x10^{-8} x^4 – 0.26689x10^{-5} x^3 + 0.12748x10^{-3} x^2 – 0.018509 = 0

Catatan:
Akar-akar persamaan dicari dengan 3 kali iterasi.
Nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif dihitung pada setiap akhir iterasi.
Jumlah digit penting ditentukan pada iterasi terakhir.

Contoh 1 (Cont.) – Solusi



Gambar 3 Grafik fungsi f(x).

$$f(x) = -0.67665 \mathrm{x}\, 10^{-8} x^4 - 0.26689 \mathrm{x}\, 10^{-5} x^3 + 0.12748 \mathrm{x}\, 10^{-3} x^2 - 0.018507 = 0$$

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Penyelesaian

Nilai perkiraan awal dari akar persamaan diambil x_0 = 10

$$f(x) = -0.67665 \times 10^{-8} x^4 - 0.26689 \times 10^{-5} x^3 + 0.12748 \times 10^{-3} x^2 - 0.018507 = 0$$

$$f'(x) = -2.7066 \times 10^{-8} x^3 - 0.80067 \times 10^{-5} x^2 + 0.25496 \times 10^{-3} x = 0$$

<u>Iterasi ke-1</u>

Akar persamaan dihitung dari:

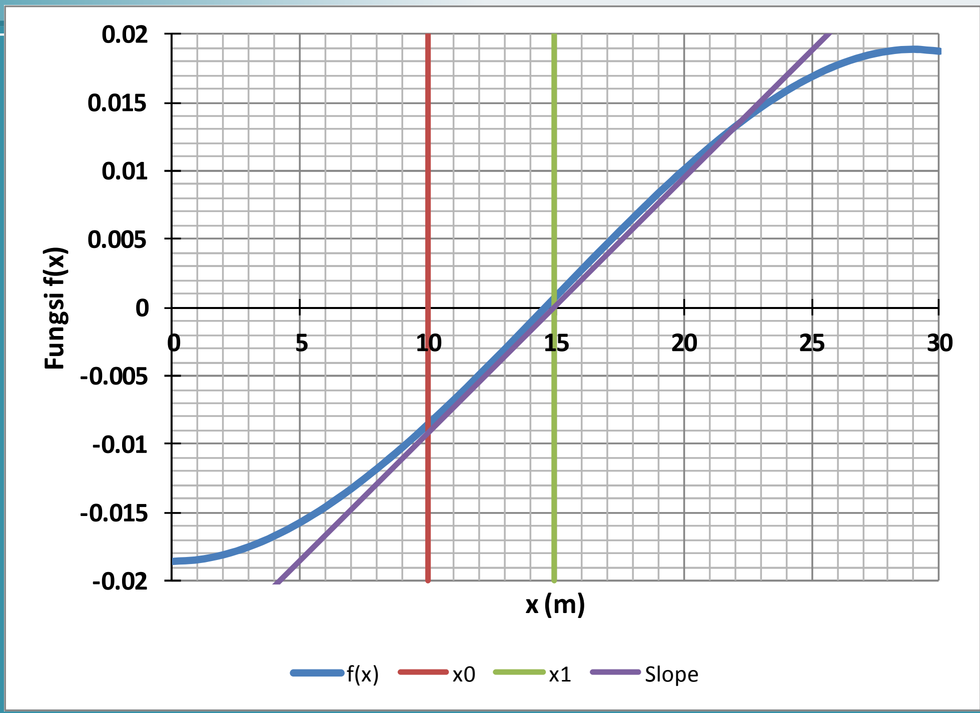
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 10 - \frac{-0.67665 \times 10^{-8} (10)^4 - 0.26689 \times 10^{-5} (10)^3 + 0.12748 \times 10^{-3} (10)^2 - 0.018507}{-2.7066 \times 10^{-8} (10)^3 - 0.80067 \times 10^{-5} (10)^2 + 0.25496 \times 10^{-3} (10)}$$

$$= 10 - \frac{-8.4956 \times 10^{-3}}{1.7219 \times 10^{-3}} = 10 - (-4.9339)$$

$$= 14.934$$

Contoh 1 (Cont.) – Solusi



Gambar 4 Grafik perkiraan akar persamaan pada iterasi ke-1

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

- Nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif |ea| pada iterasi ke-1 adalah:

$$
\begin{aligned}
|\in_a| &= \left|\frac{x_1 - x_0}{x_1}\right| \times 100 \\
&= \left|\frac{14.934 - 10}{14.934}\right| \times 100 \\
&= 33.038\%
\end{aligned}
$$

- Jumla digit penting adalah 0, karena nilai |ea| > 5% (nilai toleransi kesalahan perkiraan relatif)

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

- Iterasi ke-2: Akar persamaan dihitung dengan menggunakan hasil akar persamaan sebelumnya x_1, yaitu:

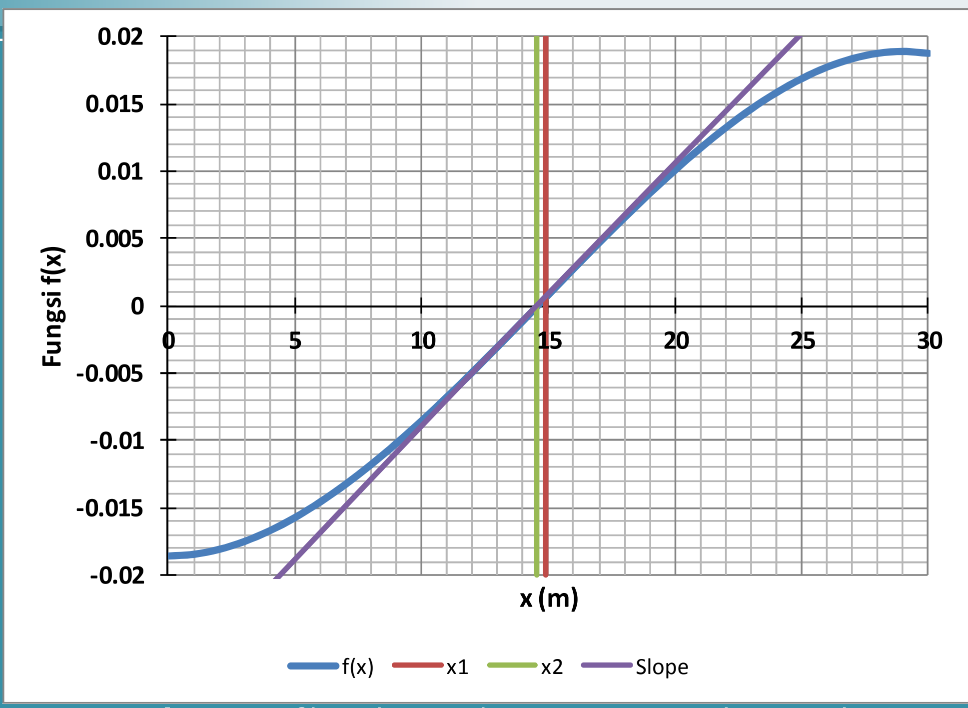
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= 14.934 - \frac{\left(\begin{array}{l} -0.67665 \times 10^{-8} (14.934)^4 - 0.26689 \times 10^{-5} (14.934)^3 \\ +0.12748 \times 10^{-3} (14.934)^2 - 0.018507 \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} -2.7066 \times 10^{-8} (14.934)^3 - 0.80067 \times 10^{-5} (14.934)^2 \\ +0.25496 \times 10^{-3} (14.934) \end{array} \right)}$$

$$= 14.934 - \frac{6.9829 \times 10^{-4}}{1.9317 \times 10^{-3}}$$

$$= 14.934 - (0.36149) = 14.573$$

Contoh 1 (Cont.) – Solusi



Gambar 5 Grafik perkiraan akar persamaan pada iterasi ke-2

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

- Nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif |ea| pada iterasi ke-2 adalah:

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100$$
$$= \left|\frac{14.572 - 14.934}{14.572}\right| \times 100$$
$$= 2.4806\%$$

- Jumla digit penting adalah 1, karena nilai |ea| > 5% (nilai toleransi kesalahan perkiraan relatif)

Example 1 Cont.

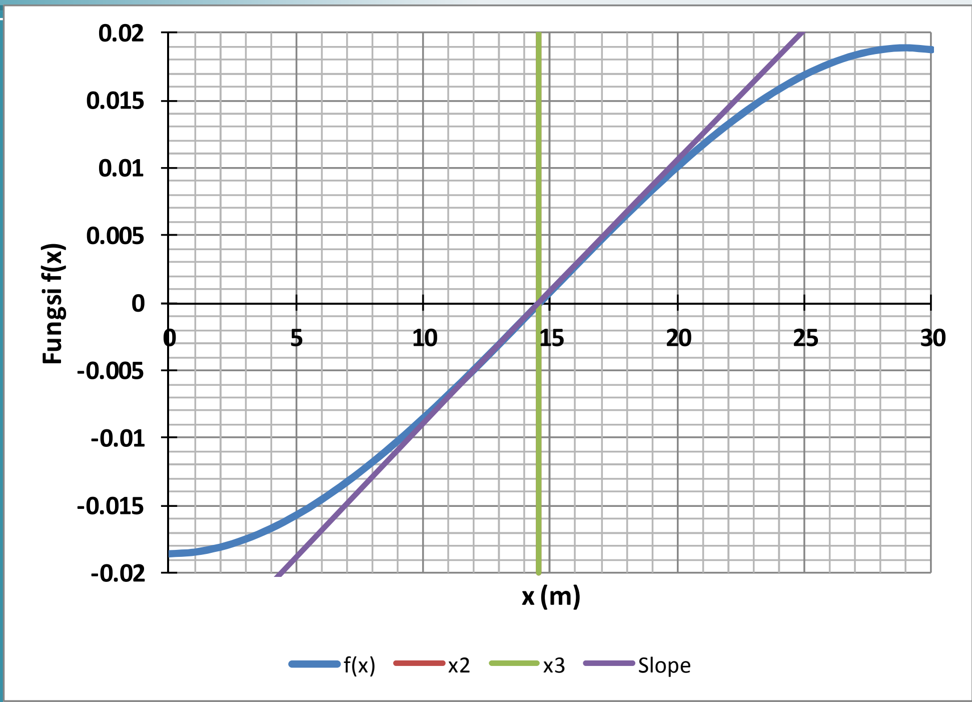
- Iterasi ke-3: Akar persamaan dihitung dengan menggunakan hasil akar persamaan sebelumnya x_2, yaitu:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$= 14.573 - \frac{\left(\begin{array}{l} -0.67665\times10^{-8}(14.572)^4 - 0.26689\times10^{-5}(14.572)^3 \\ +0.12748\times10^{-3}(14.572)^2 - 0.018507 \end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l} -2.7066\times10^{-8}(14.572)^3 - 0.80067\times10^{-5}(14.572)^2 \\ +0.25496\times10^{-3}(14.572) \end{array}\right)}$$

$$= 14.573 - \frac{-4.7078\times10^{-9}}{1.9314\times10^{-3}} = 14.573 - \left(-2.4375\times10^{-6}\right) = 14.573$$

Contoh 1 (Cont.) – Solusi



Gambar 6 Grafik perkiraan akar persamaan pada iterasi ke-3

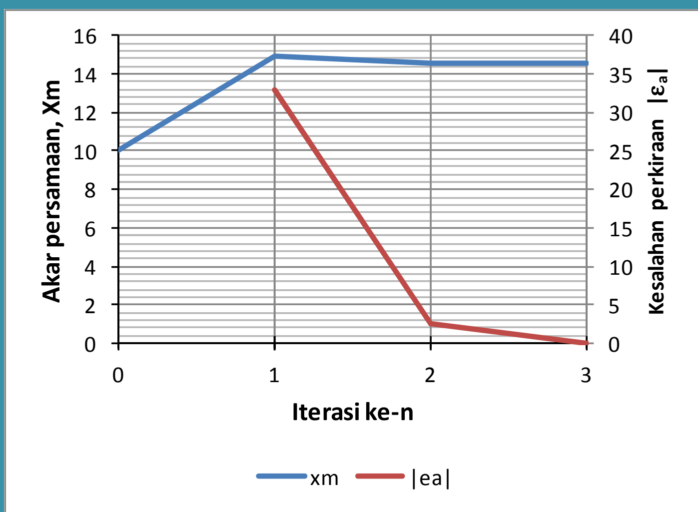
Contoh 1 (Cont.) – Solusi

- Nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif |ea| pada iterasi ke-3 adalah:

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{14.573 - 14.573}{14.573}\right| \times 100$$

$$= 1.6727 \times 10^{-5}\ \% < 5 \times 10^{-3} \%$$



Contoh 1 (Cont.) – Solusi

- Jumlah digit penting diberikan oleh nilai terbesar m dari:

$$|\epsilon_a| \le 0.5 \times 10^{2-m}$$
$$1.6727 \times 10^{-5} \le 0.5 \times 10^{2-m}$$
$$3.3454 \times 10^{-5} \le 10^{2-m}$$
$$\log\left(3.3454 \times 10^{-5}\right) \le 2-m$$
$$m \le 2 - \log\left(3.3454 \times 10^{-5}\right) = 6.4756$$

- Maka, m = 6 → jumlah digit penting untuk akar persamaan 14.573 adalah 6 yaitu 14.572513.

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

- Defleksi maksimum papan terjadi pada jarak x = 14.573 inch dari tepi kiri.

$v(x) = -0.13533\text{x}10^{-8}\,(14.573)^5 - 0.66722\text{x}10^{-6}\,(14.573)^4 + 0.42493\text{x}10^{-4}\,(14.573)^3 - 0.018507(14.573) = -0.109$ *inch* (ke bawah)

Pertemuan ke-4

Persamaan Non-Linier: Metode Newton-Raphson

Kelebihan dan kekurangan metode Newton Raphson

Kelebihan

- Lebih cepat memperoleh hasil yang konvergensi (quadratic convergence).
- Hanya memerlukan satu nilai perkiraan.

Kekurangan: Divergensi pada titik balik (inflection point)

- Bila nilai perkiraan awal atau iterasi yang digunakan adalah berdekatan dengan titik balik dari fungsi f(x) maka dapat memberikan hasil awal yang divergen.
- Misalnya, untuk persamaan $f(x) = (x - 1)^3 + 0.512 = 0$. Akar persamaan diperkirakan oleh

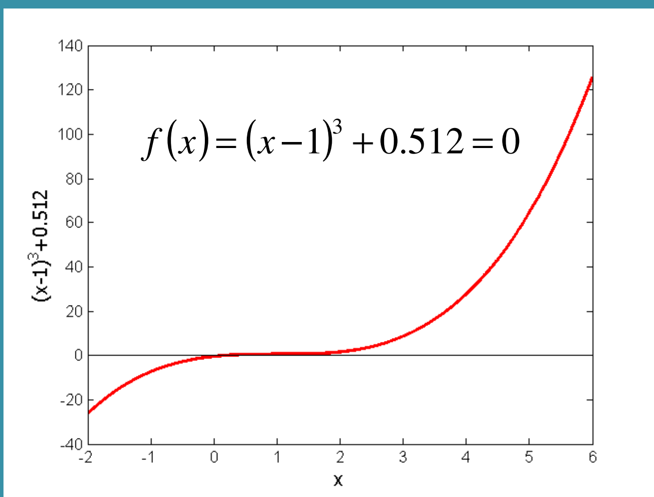
$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 1)^3 + 0.512}{3(x_i - 1)^2}$$

- Tabel1 menyajikan hasil iterasi akar persamaan. Akar persamaan mulai mengalami divergensi pada iterasi ke-6 karena nilai perkiraan sebelumnya 0.92589 dekat dengan titik balik fungsi f(x) pada x = 1.
- Namun setelah iterasi ke-18 diperoleh nilai yang konvergen mendekati nilai eksak pada x = 0.2.

Kekuragan – Titik Balik

Tabel 1 Divergensi di dekat titik balik

Iteration Number	x_i
0	5.0000
1	3.6560
2	2.7465
3	2.1084
4	1.6000
5	0.92589
6	−30.119
7	−19.746
…	…
18	0.2000



Gambar 8 Divergensi pada titik balik

Kekurangan – Pembagian Nol

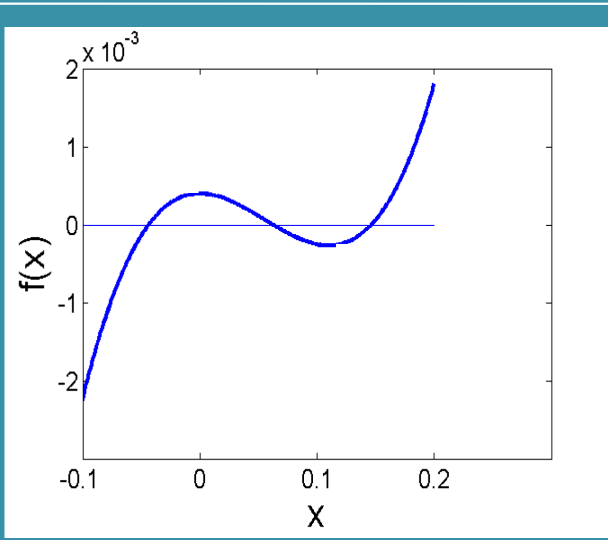
- Untuk persamaan fungsi

$$f(x) = x^3 - 0.03x^2 + 2.4\times10^{-6} = 0$$

- Akar persamaan diperkirakan dari

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 0.03x_i^2 + 2.4\times10^{-6}}{3x_i^2 - 0.06x_i}$$

- Untuk $x_0 = 0$ dan $x_0 = 0.02$, menghasilkan pembagi nol.



Gambar 9 Kesulitan pembagian nol atau mendekati nol

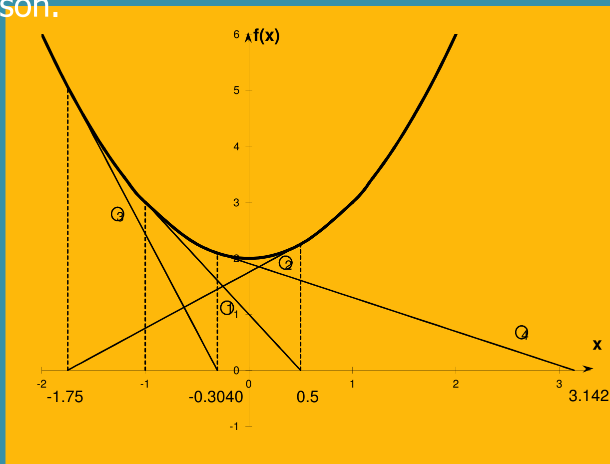
Kekurangan – "Gelombang" dekat nilai maksimum dan minimum lokal

- Hasil yang diperole dari metode Newton-Raphson dimungkinkan tidak tetap atau "bergelombang" (oscillation) terhadap nilai maksismum atau minimum tanpa hasil yang konvergen, tetapi konvergen di dekat nilai maksimum atau minimum lokalnya.
- Kondisi menyebabkan pembagian dengan nol atau mendekati nol.
- Contohnya untuk akar persamaan dari $f(x) = x^2 + 2 = 0$ adalah tidak real.

Kekurangan – “Gelombang” dekat nilai maksimum dan minimum lokal

Tabel 3 Gelombang di dekat nilai maksimum dan minium lokasl dalam metode Newton-Raphson.

Iteration Number	x_i	$f(x_i)$	$\lvert\varepsilon_a\rvert$ %
0	−1.0000	3.00	
1	0.5	2.25	300.00
2	−1.75	5.063	128.571
3	−0.30357	2.092	476.47
4	3.1423	11.874	109.66
5	1.2529	3.570	150.80
6	−0.17166	2.029	829.88
7	5.7395	34.942	102.99
8	2.6955	9.266	112.93
9	0.97678	2.954	175.96



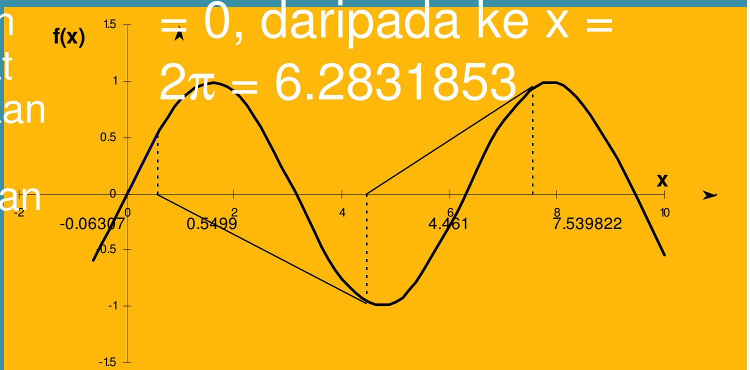
Gambar 10 Gelombang dekat nilai minimum lokasl dari fungsi $f(x) = x^2 + 2$

Kekurangan – Lompatan Akar (Root Jumping)

- Dalam beberapa kasus dimana fungsi f(x) berbentuk “gelombang” dan memiliki sejumlah akar persamaan, maka dimungkinkan akan dipilih nilai perkiraan yang dekat dengan akar tersebut. Akan tetapi, nilai perkiraan mungkin akan “lompat” dan konvergen dengan nilai akar persamaan lainnya.
- Sebagai contohnya

$$f(x) = \sin x = 0$$

- Bila dipilih $x_0 = 2.4\pi = 7.539822$
- Akan konvergen ke x = 0, daripada ke x = $2\pi = 6.2831853$



Gambar 11 Kasus lompatan akar pada fungsi f(x) = sin x = 0