# Analisa Terapan: Metode Numerik

Pertemuan ke-4: 27 September 2012

Persamaan Non-Linier: Metode Interpolasi Linier (False-Position Method )

Dr.Eng. Agus S. Muntohar
Department of Civil Engineering



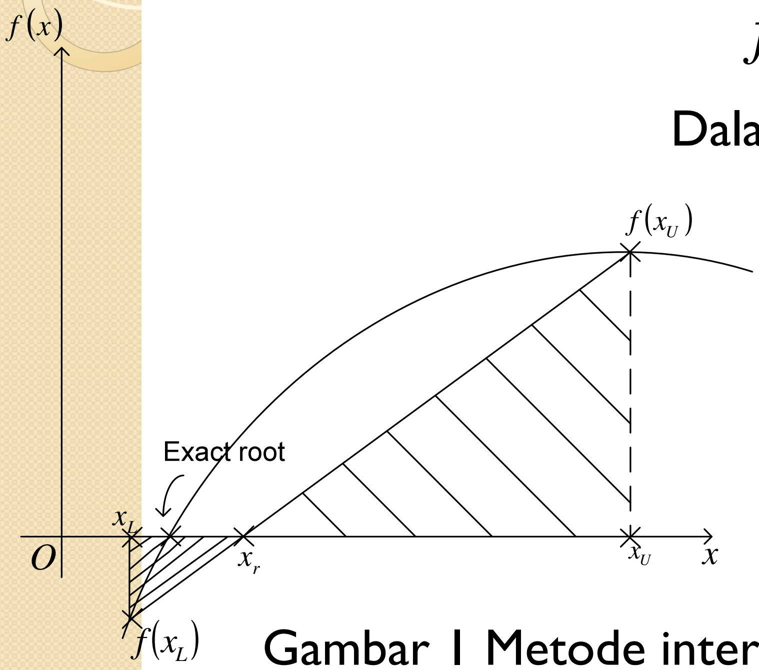
# Pengantar

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

Dalam metode ½ interval:

$$f(x_L) * f(x_U) < 0 \qquad (2)$$

$$x_r = \frac{x_L + x_U}{2} \qquad (3)$$




Gambar 1 Metode interpolasi linier

Dr.Eng. Agus S. Muntohar
Department of Civil Engineering

# Metode Interpolasi Linier

- Berdasarkan dua segitiga sebangun pada Gambar 1, dieproleh :

$$\frac{f(x_L)}{x_r - x_L} = \frac{f(x_U)}{x_r - x_U} \qquad (4)$$

- Tanda di kedua ruas Persamaan (4) adalah konsisten, maka:

$$f(x_L) < 0;\ x_r - x_L > 0$$

$$f(x_U) > 0;\ x_r - x_U < 0$$



Dari Persamaan (4) diperoleh:

$$(x_r - x_L)f(x_U) = (x_r - x_U)f(x_L)$$

$$x_U f(x_L) - x_L f(x_U) = x_r\{f(x_L) - f(x_U)\}$$

Persamaan di atas dapat diselesaikan untuk mendapatkan akar persamaan $x_r$ seperti dalam Pers. 5

$$x_r = \frac{x_U f(x_L) - x_L f(x_U)}{f(x_L) - f(x_U)} \qquad (5)$$

Persamaan (5) dapat dituliskan

$$x_r = x_U - \frac{f(x_U)\{x_L - x_U\}}{f(x_L) - f(x_U)} \qquad (6)$$

atau

$$x_r = x_L - \frac{f(x_L)}{\left\{\dfrac{f(x_U) - f(x_L)}{x_U - x_L}\right\}} \qquad (7)$$



# Algoritma Metode Interpolasi Linier

1 Pilih nilai perkiraan awal $x_l$ dan $x_u$ sehingga diperoleh $f(x_l)f(x_u) < 0$

2 Perkirakan akar persamaan dengan

$$x_r = \frac{x_U f(x_L) - x_L f(x_U)}{f(x_L) - f(x_U)}$$

atau

$$x_r = x_u - \frac{f(x_U)}{f(x_L) - f(x_U)}(x_u - x_l)$$

## Algoritma Metode Interpolasi Linier

3 Cek kondisi berikut:

a Jika $f(x_l)f(x_r) < 0$, akar persamaan berada diantara $x_l$ dan $x_r$, sehingga $x_l = x_l$ dan $x_u = x_r$.

b Jika $f(x_l)f(x_r) > 0$, akar persamaan berada diantara $x_r$ dan $x_u$, sehingga $x_l = x_r$ dan $x_u = x_u$.

c Jika $f(x_l)f(x_r) = 0$, akar persamaan adalah $x_r$.

- Hentikan penghitungan jika kondisi c benar



## Algoritma Metode Interpolasi Linier

4 Hitung nilai perkiraan baru dari akar persamaan

$$x_r = \frac{x_U f(x_L) - x_L f(x_U)}{f(x_L) - f(x_U)}$$

atau

$$x_r = x_u - \frac{f(x_U)}{f(x_L) - f(x_U)}(x_u - x_l)$$

# Algoritma Metode Interpolasi Linier

- Hitung nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif

$$\left|\in_a\right| = \left|\frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}}\right| \times 100$$

$x_m^{new}$ = estimated root from present iteration

$x_m^{old}$ = estimated root from previous iteration

5 Jika $|\varepsilon_a| > \varepsilon_s$ (misal: $\varepsilon_s = 10^{-3}$), maka ulangi Langkah 2, jika tidak hentikan hitungan

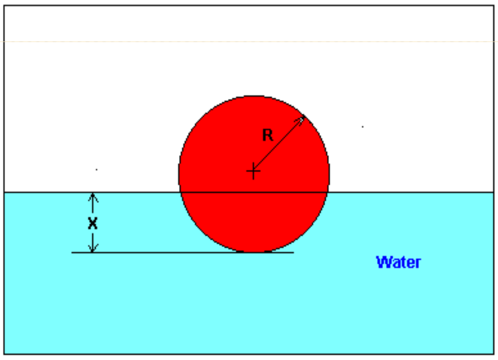


# Catatan

- Metode Interpolasi Linier dan ½ Interval memiliki algoritma yang serupa.
- Hanya saja terdapat perbedaan pada persamaan yang digunakan untuk menentukan nilai perkiraan baru dari akar persamaan $\boldsymbol{x_m}$ seperti dalam Langkah 2 dan 4.

# Contoh 1

Suatu bola terapung seperti Gambar 6 memiliki berat jenis 0.6 dan jari-jari 5.5 cm. Tentukan kedalaman bola yang terendam dalam air!




**Gambar 2** Diagram bola terapung



# Contoh 1 (Cont.)

Kedalaman bola yang terendam air *x* dinyatakan dengan persamaan berikut

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993 \times 10^{-4} = 0$$

a) Gunakan metode interpolasi linier untuk menentukan akar-akar persamaan kedalaman bola yang terendam air *x*. Lakukan tiga kali iterasi untuk memperkirakan akar-akar persamaan terebut.

b) Tentukan nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif pada masing-masing iterasi, dan jumlah digit pentingnya.

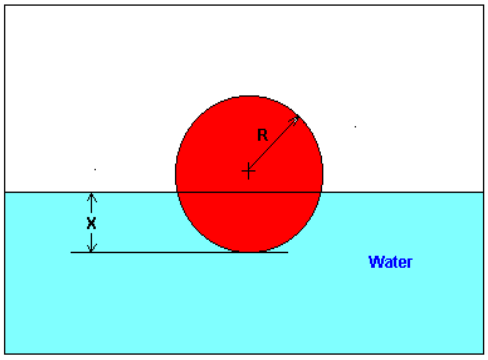
# Contoh 1 (Cont.)

Secara fisik, bagian bola yang terendam air memiliki kedalaman antara *x* = 0 dan *x* = 2*R*,

dengan *R* = jari-jari bola,

yaitu

$$0 \le x \le 2R$$
$$0 \le x \le 2(0.055)$$
$$0 \le x \le 0.11$$




**Gambar 2** Diagram bola terapung



# Contoh 1 (Cont.) - Solusi

- Diambil, $x_l$ = 0 dan $x_u$ = 0.11 sebagai nilai perkiraan awal:

$$f(x_L) = f(0) = (0)^3 - 0.165(0)^2 + 3.993\times10^{-4} = 3.993\times10^{-4}$$
$$f(x_U) = f(0.11) = (0.11)^3 - 0.165(0.11)^2 + 3.993\times10^{-4} = -2.662\times10^{-4}$$

- Sehingga

$$f(x_L)f(x_U) = f(0)f(0.11) = (3.993\times10^{-4})(-2.662\times10^{-4}) < 0$$

# Contoh 1 (Cont.) - Solusi

- Iterasi 1:

$$x_m = \frac{x_U f(x_L) - x_L f(x_U)}{f(x_L) - f(x_U)}$$

$$= \frac{0.11 \times 3.993 \times 10^{-4} - 0 \times \left(-2.662 \times 10^{-4}\right)}{3.993 \times 10^{-4} - \left(-2.662 \times 10^{-4}\right)}$$

$$= 0.0660$$

$$f(x_m) = f(0.0660) = (0.0660)^3 - 0.165(0.0660)^2 + \left(3.993 \times 10^{-4}\right)$$

$$= -3.1944 \times 10^{-5}$$

$$f(x_L)f(x_m) = f(0)f(0.0660) = (+)(-) < 0$$

$$x_L = 0,\ x_U = 0.0660$$



# Contoh 1 (Cont.) - Solusi

- Iterasi 2:

$$x_m = \frac{x_U f(x_L) - x_L f(x_U)}{f(x_L) - f(x_U)}$$

$$= \frac{0.0660 \times 3.993 \times 10^{-4} - 0 \times \left(-3.1944 \times 10^{-5}\right)}{3.993 \times 10^{-4} - \left(-3.1944 \times 10^{-5}\right)}$$

$$= 0.0611$$

$$f(x_m) = f(0.0611) = (0.0611)^3 - 0.165(0.0611)^2 + \left(3.993 \times 10^{-4}\right)$$

$$= 1.1320 \times 10^{-5}$$

$$f(x_L)f(x_m) = f(0)f(0.0611) = (+)(+) > 0$$

Maka: $x_L = 0.0611,\ x_U = 0.0660$

# Contoh 1 (Cont.) - Solusi

- Nilai absolut dari kesalahan perkiraan pada Iterasi 2:

$$\in_a = \left|\frac{0.0611 - 0.0660}{0.0611}\right| \times 100 \cong 8\%$$

- Iterasi 3:

$$x_m = \frac{x_U f(x_L) - x_L f(x_U)}{f(x_L) - f(x_U)}$$

$$= \frac{0.0660 \times 1.132 \times 10^{-5} - 0.0611 \times \left(-3.1944 \times 10^{-5}\right)}{1.132 \times 10^{-5} - \left(-3.1944 \times 10^{-5}\right)}$$

$$= 0.0624$$



# Contoh 1 (Cont.) - Solusi

$$f(x_m) = -1.1313 \times 10^{-7}$$

$$f(x_L) f(x_m) = f(0.0611) f(0.0624) = (+)(-) < 0$$

- Maka: $x_L = 0.0611,\ x_U = 0.0624$

$$\in_a = \left|\frac{0.0624 - 0.0611}{0.0624}\right| \times 100 \cong 2.05\%$$

# Contoh 1 (Cont.) - Solusi

$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4} = 0$$

Tabel 1: Hasil penghitungan akar persamaan Contoh 1

| Iteration | $x_L$ | $x_U$ | $x_m$ | $\lvert\in_a\rvert\%$ | $f(x_m)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.1100 | 0.0660 | N/A | $-3.1944\times10^{-5}$ |
| 2 | 0.0000 | 0.0660 | 0.0611 | 8.00 | $1.1320\times10^{-5}$ |
| 3 | 0.0611 | 0.0660 | 0.0624 | 2.05 | $-1.1313\times10^{-7}$ |
| 4 | 0.0611 | 0.0624 | 0.0632377619 | 0.02 | $-3.3471\times10^{-10}$ |



# Jumlah Digit Penting

$$\lvert\in_a\rvert \le 0.5\times10^{2-m}$$

$$0.02 \le 0.5\times10^{2-m}$$

$$0.04 \le 10^{2-m}$$

$$\log(0.04) \le 2-m$$

$$m \le 2-\log(0.04)$$

$$m \le 2-(-1.3979)$$

$$m \le 3.3979$$

$$So,\ m = 3$$

Pada Iterasi ke-4, jumlah digit penting dari nilai akar 0.062377619 adalah 3.

# References

1. S.C. Chapra, R.P. Canale, Numerical Methods for Engineers, Fourth Edition, Mc-Graw Hill.