Pertemuan ke-3

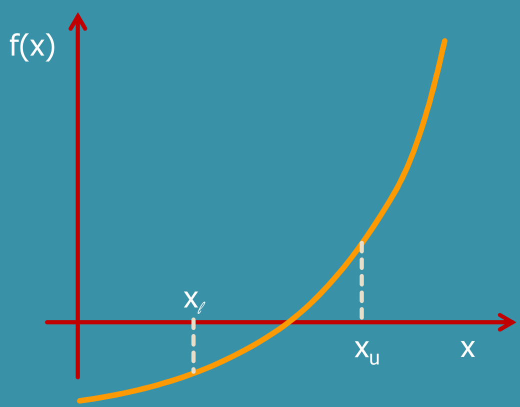
Persamaan Non-Linier: Metode ½ Interval (Bisection)

27 September 2012

Analisa Terapan: Metode Numerik

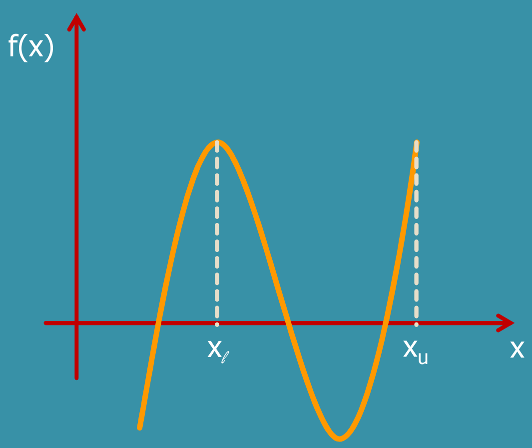
Metode Bisection – Dasar

Teorema: Suatu persamaan f(x)=0, dimana f(x) adalah fungsi kontinyu real, memiliki akar-akar antara x_l dan x_u bila $f(x_l)\, f(x_u) < 0$.



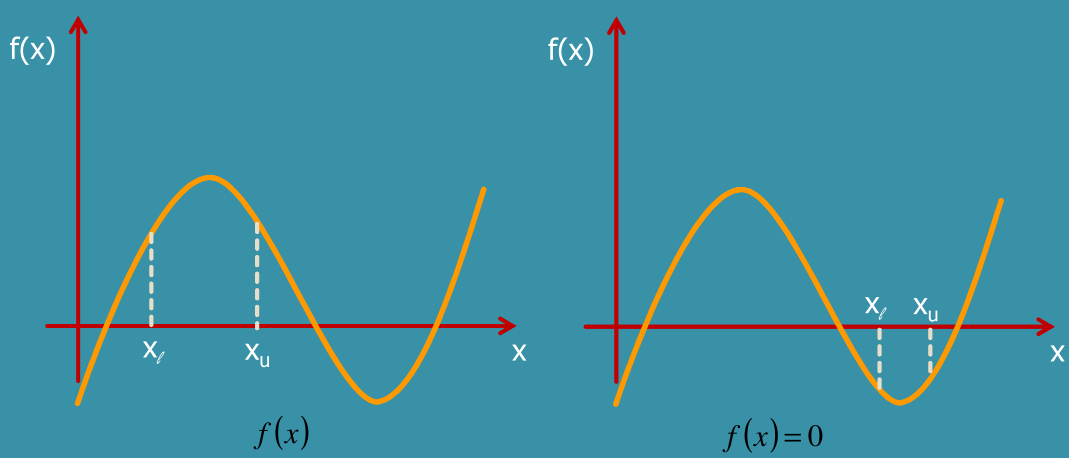
Gambar 1 Setidaknya satu akar persamaan berada diantara dua titik bila fungsi real, kontinyu, dan berbeda tanda.

Metode Bisection – Dasar



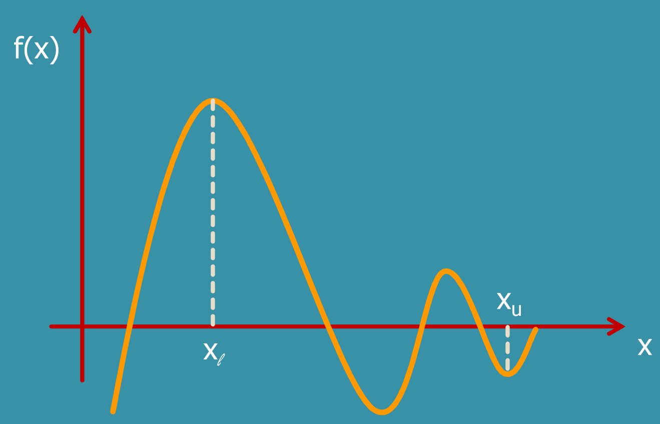
Gambar 2 Jika fungsi f(x) tidak berubah tanda antara dua titik, akar-akar persamaan f(x) = 0 masih berada diantara dua titik

Metode Bisection – Dasar



Gambar 3 Bila fungsi f(x) tidak berubah tanda diantara dua titik, akar-akar persamaan f(x) = 0 tidak berada diantara dua titik

Metode Bisection – Dasar



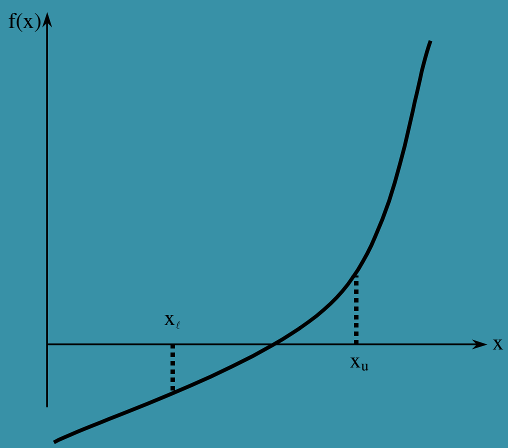
Gambar 4 Bila fungsi f(x) berubah tanda diantara dua titik, lebih dari satu akar persamaan f(x) = 0 berada diantara dua titik

Persamaan Non-Linier: Metode Bisection

Algoritma metode Bisection

Langkah 1

Pilih x_ℓ dan x_u sebagai dua akar perkiraan sehingga $f(x_\ell)$ $f(x_u) < 0$, atau f(x) tanda yang berbeda antara x_ℓ dan x_u. Seperti pada Gambar 1-1.

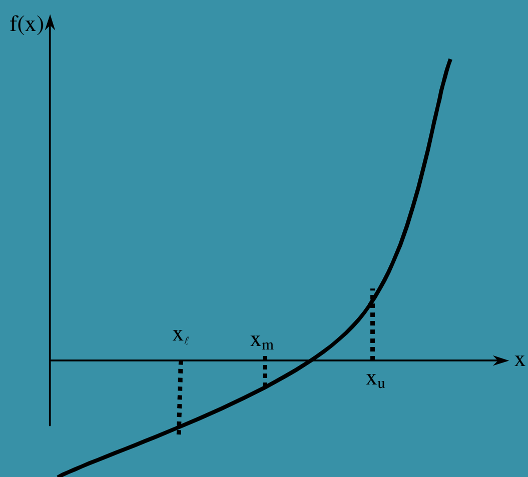


Gambar 1-1

Langkah 2

Perkirakan akar x_m dari persamaan f(x) = 0 sebagai titik tengah (mid point) antara x_ℓ and x_u yaitu

$$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2}$$



Gambar 5 Perkiraan x_m

Langkah 3

Periksa kondisi berikut:

a) Bila $f(x_l)\ f(x_m) < 0$, maka akar berada diantara x_ℓ dan x_m; dan $x_\ell = x_\ell$; $x_u = x_m$.

b) Bila $f(x_l)\ f(x_m) > 0$, maka akar persamaan berada diantara x_m dan x_u; dan $x_\ell = x_m$; $x_u = x_u$.

c) Bila $f(x_l)\ f(x_m) = 0$; maka akar persamaan adalah x_m. Hentikan algoritma bila benar.

Langkah 4

Hitung nilai perkiraan baru untuk akar persamaan:

$$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2}$$

Hitung nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif

$$|\in_a| = \left| \frac{x_m^{new} - x_m^{old}}{x_m^{new}} \right| \times 100$$

dimana,

x_m^{old} = nilai perkiraan akar sebelumnya

x_m^{new} = nilai perkiraan baru akar

Langkah 5

Bandingkan nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif $|\varepsilon_a|$ dengan toleransi kesalahan yang ditetapkan $|\varepsilon_s|$

Is $|\epsilon_a| > \epsilon_s$?

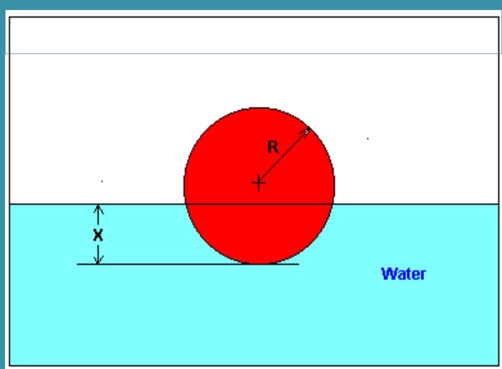
Yes → Ke Langkah 2 gunakam nilai perkiraan baru atas dan bawah

No → "Stop" algoritma

Jumlah iterasi perlu dicek bila melebihi jumlah iterasi maksimum yang diijinkan. Bila kondisi ini tercapai, algoritma perlu dihentikan penghitungannya.

Contoh 1

Suatu bola terapung seperti Gambar 6 memiliki berat jenis 0.6 dan jari-jari 5.5 cm. Tentukan kedalaman bola yang terendam dalam air!



Gambar 6 Diagram bola terapung

Contoh 1 (Cont.)

Kedalaman bola yang terendam air *x* dinyatakan dengan persamaan berikut

$$x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4} = 0$$

a) Gunakan metode bisection untuk menentukan akar-akar persamaan kedalaman bola yang terendam air *x*. Lakukan tiga kali iterasi untuk memperkirakan akar-akar persamaan terebut.

b) Tentukan nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif pada masing-masing iterasi, dan jumlah digit pentingnya.

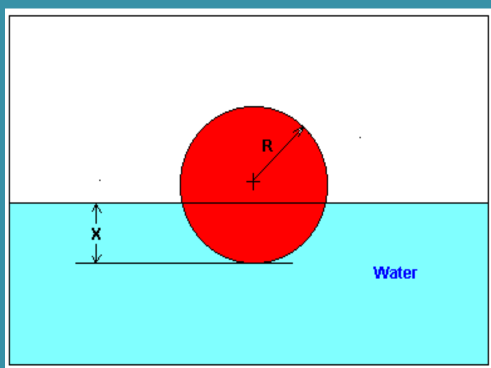
Contoh 1 (Cont.)

Secara fisik, bagian bola yang terendam air memiliki kedalaman antara $x = 0$ dan $x = 2R$,

dengan R = jari-jari bola,

yaitu

$$0 \le x \le 2R$$
$$0 \le x \le 2(0.055)$$
$$0 \le x \le 0.11$$

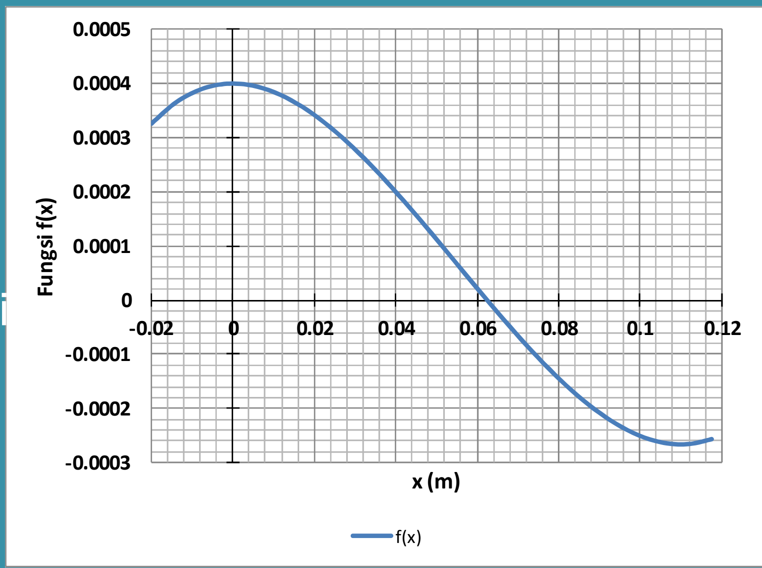


Gambar 6 Diagram bola terapung

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Penyelesaian:

Untuk membantu pemahaman tentang bagaimana metode ini digunakan untuk mencari akar-akar persamaan, ditampilkan grafik fungsi f(x), dimana



$$f(x) = x^3 - 0.165x^2 + 3.993\times10^{-4}$$

Gambar 7 Grafik dari fungsi f(x)

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Asumsikan nilai awal terendah dan teratas

$$x_\ell = 0.00$$
$$x_u = 0.11$$

Cek bila fungsi f(x) berubah tanda antara x_ℓ and x_u .

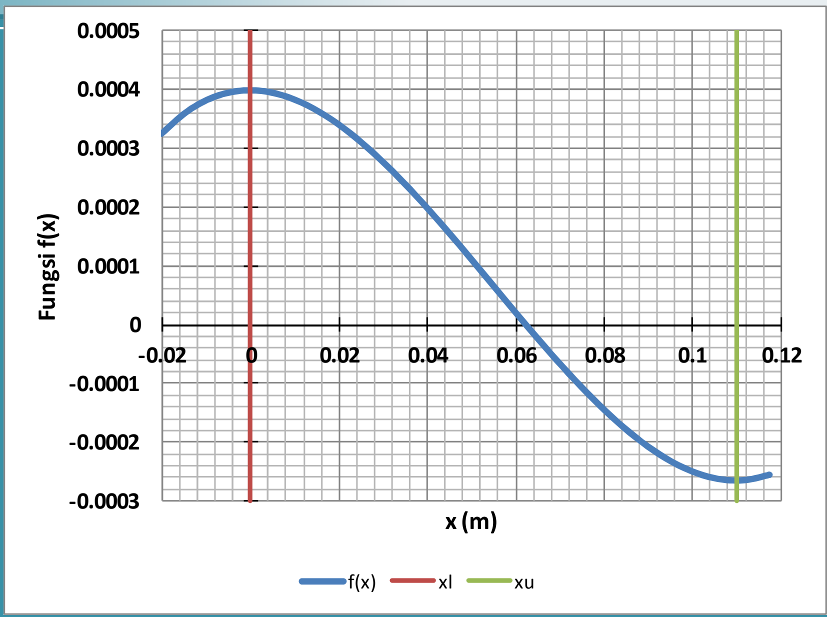
$$f(x_l) = f(0) = (0)^3 - 0.165(0)^2 + 3.993\times10^{-4} = 3.993\times10^{-4}$$
$$f(x_u) = f(0.11) = (0.11)^3 - 0.165(0.11)^2 + 3.993\times10^{-4} = -2.662\times10^{-4}$$

Maka

$$f(x_l)f(x_u) = f(0)f(0.11) = (3.993\times10^{-4})(-2.662\times10^{-4}) < 0$$

Jadi, terdapat sediikitnya satu akar persamaan berada diantara x_ℓ and x_u, yaitu antara 0 dan 0.11

Contoh 1 (Cont.) – Solusi



Gambar 8 Grafik yang menunjukkan fungsi beribah tanda diantara batas awal x_l dan x_u

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Iterasi 1

Nilai perkiraan akar persamaan $x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0+0.11}{2} = 0.055$

$$f(x_m) = f(0.055) = (0.055)^3 - 0.165(0.055)^2 + 3.993\times10^{-4} = 6.655\times10^{-5}$$

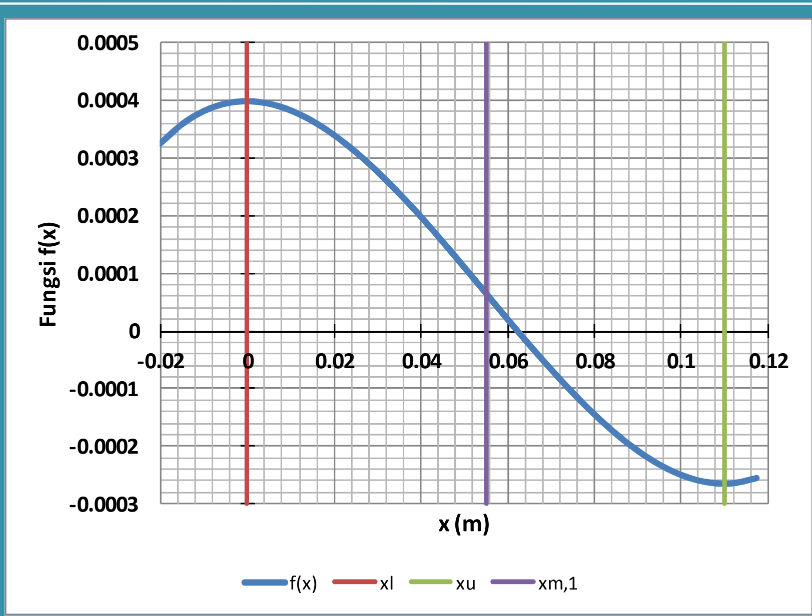
$$f(x_l)f(x_m) = f(0)f(0.055) = \left(3.993\times10^{-4}\right)\left(6.655\times10^{-5}\right) > 0$$

Maka, akar-akar persamaan berada diantara x_m dan x_u, yaitu, antara 0.055 dan 0.11. Jadi, nilai baru terendah dan teratas dari akar-akar persamaan

$$x_l = 0.055,\ x_u = 0.11$$

Pada titik ini, nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif $|\varepsilon_a|$ belum bisa dihitung karena belum diperoleh nilai perkiraan sebelumnya

Contoh 1 (Cont.) – Solusi



Gambar 9 Perkiraan akar persamaan Iterasi 1

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Iterasi 2

Nilai perkiraan akar persamaan

$$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0.055 + 0.11}{2} = 0.0825$$

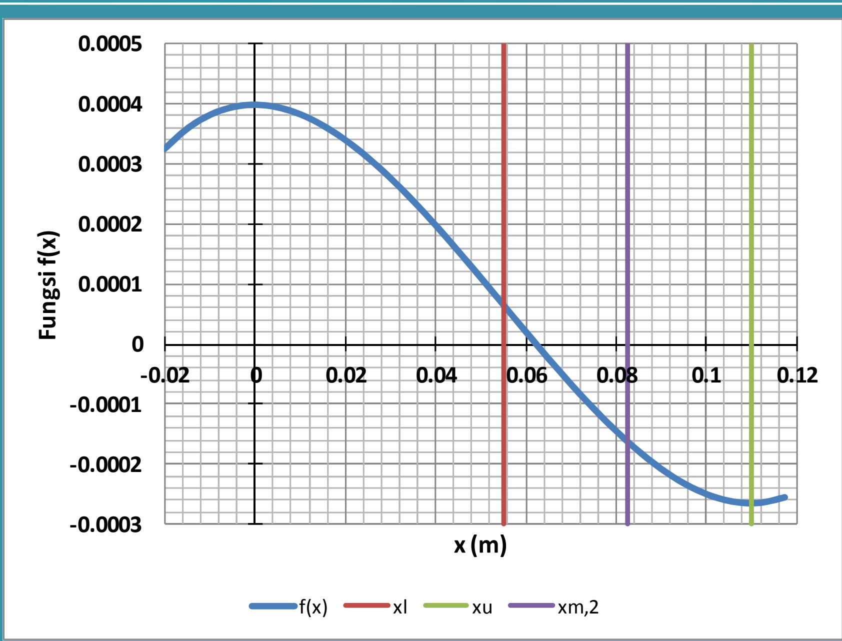
$$f(x_m) = f(0.0825) = (0.0825)^3 - 0.165(0.0825)^2 + 3.993\times10^{-4} = -1.622\times10^{-4}$$

$$f(x_l)f(x_m) = f(0.055)f(0.0825) = \left(-1.622\times10^{-4}\right)\left(6.655\times10^{-5}\right) < 0$$

Maka, akar-akar persamaan berada diantara x_m dan x_u, yaitu, antara 0.055 dan 0.0825. Jadi, nilai baru terendah dan teratas dari akar-akar persamaan

$$x_l = 0.055, \;\; x_u = 0.0825$$

Contoh 1 (Cont.) – Solusi



Gambar 10 Perkiraan akar persamaan Iterasi 2

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif $|\varepsilon_a|$ pada Iterasi ke-2

$$
\begin{aligned}
|\in_a| &= \left|\frac{x_{m(2)} - x_{m(1)}}{x_{m(2)}}\right| \times 100 \\
&= \left|\frac{0.0825 - 0.055}{0.0825}\right| \times 100 \\
&= 33.333\%
\end{aligned}
$$

Jumlah digit penting akar persamaan x_m = 0.0825 belum memberikan hasil yang tepat karena nilai $|\varepsilon_a|$ > 5%.

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Iterasi 3

Nilai perkiraan akar persamaan

$$x_m = \frac{x_\ell + x_u}{2} = \frac{0.055 + 0.0825}{2} = 0.06875$$

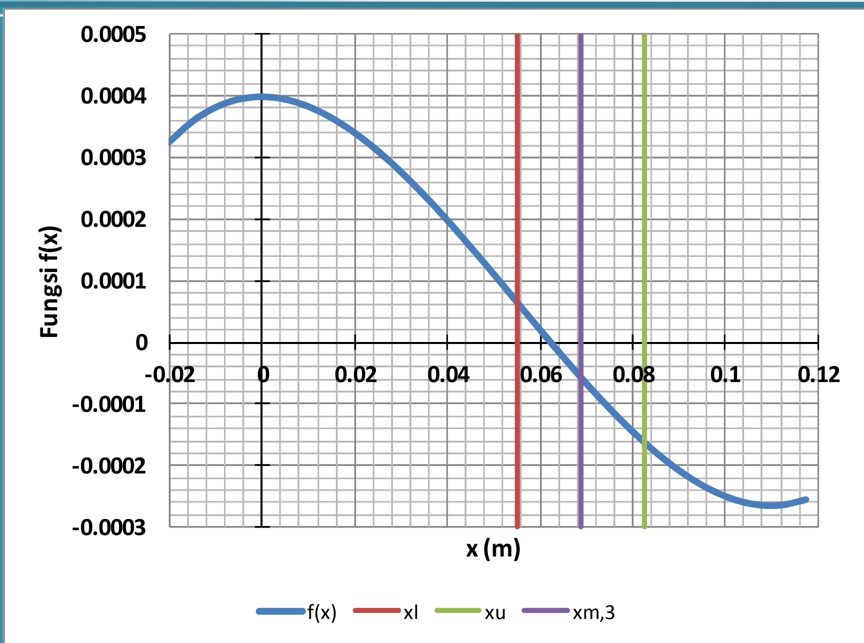
$$f(x_m) = f(0.06875) = (0.06875)^3 - 0.165(0.06875)^2 + 3.993\times10^{-4} = -5.563\times10^{-5}$$

$$f(x_l)f(x_m) = f(0.055)f(0.06875) = (6.655\times10^{-5})(-5.563\times10^{-5}) < 0$$

Maka, akar-akar persamaan berada diantara x_m dan x_u, yaitu, antara 0.055 and 0.06875. Jadi, nilai baru terendah dan teratas dari akar-akar persamaan

$$x_l = 0.055,\ x_u = 0.06875$$

Contoh 1 (Cont.) – Solusi



Gambar 11 Perkiraan akar persamaan Iterasi 3

Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Nilai absolut dari kesalahan perkiraan relatif $|\varepsilon_a|$ pada Iterasi ke-3

$$
\begin{aligned}
|\epsilon_a| &= \left|\frac{x_{m(3)} - x_{m(2)}}{x_{m(3)}}\right| \times 100 \\
&= \left|\frac{0.06875 - 0.0825}{0.06875}\right| \times 100 \\
&= 20\%
\end{aligned}
$$

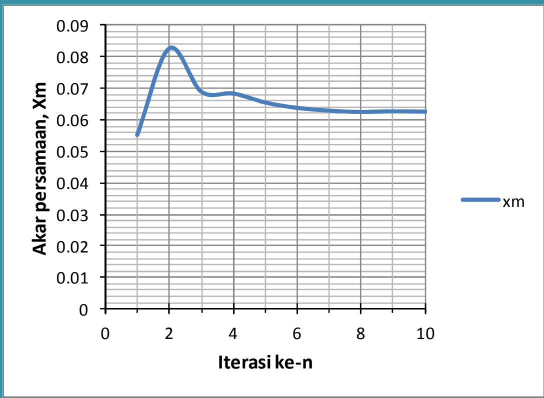
Jumlah digit penting belum memberikan hasil yang benar karena $|\varepsilon_a|$ masih > 5%.
Iterasi berikutnya dilakukan dan disajikan pada Tabel 1.

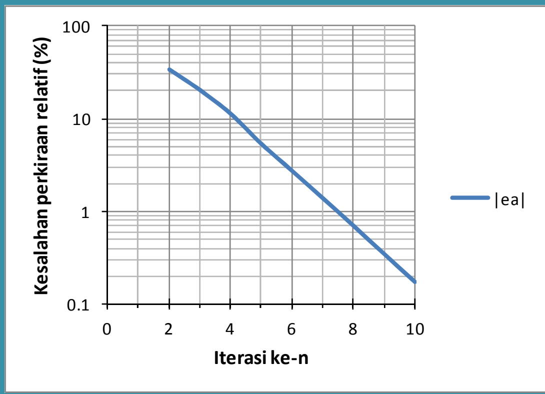
Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Table 1 Akar persamaan dari fungsi f(x)=0 dengan 10 iterasi menggunakan Metode Bisection

Iteration	x_ℓ	x_u	x_m	$\lvert\epsilon_a\rvert$ %	$f(x_m)$
1	0.00000	0.11	0.055	----------	6.655×10^{-5}
2	0.055	0.11	0.0825	33.33	-1.622×10^{-4}
3	0.055	0.0825	0.06875	20.00	-5.563×10^{-5}
4	0.055	0.06875	0.06188	11.11	4.484×10^{-6}
5	0.06188	0.06875	0.06531	5.263	-2.593×10^{-5}
6	0.06188	0.06531	0.06359	2.702	-1.0804×10^{-5}
7	0.06188	0.06359	0.06273	1.370	-3.176×10^{-6}
8	0.06188	0.06273	0.0623	0.6897	6.497×10^{-7}
9	0.0623	0.06273	0.06252	0.3436	-1.265×10^{-6}
10	0.0623	0.06252	0.06241	0.1721	-3.0768×10^{-7}

Contoh 1 (Cont.) – Solusi





Contoh 1 (Cont.) – Solusi

Jumlah digit penting yang memberikan hasil benar dihitung sebagai nilai terbanyak *m* yaitu :

$$|\epsilon_a| \le 0.5 \times 10^{2-m}$$

$$0.1721 \le 0.5 \times 10^{2-m}$$

$$0.3442 \le 10^{2-m}$$

$$\log(0.3442) \le 2 - m$$

$$m \le 2 - \log(0.3442) = 2.463$$

Jadi, m = 2

Jumlah digit terakhir dari akar persamaan 0.06241 pada iterasi ke-10 adalah 2.

Kelebihan Metode Bisection

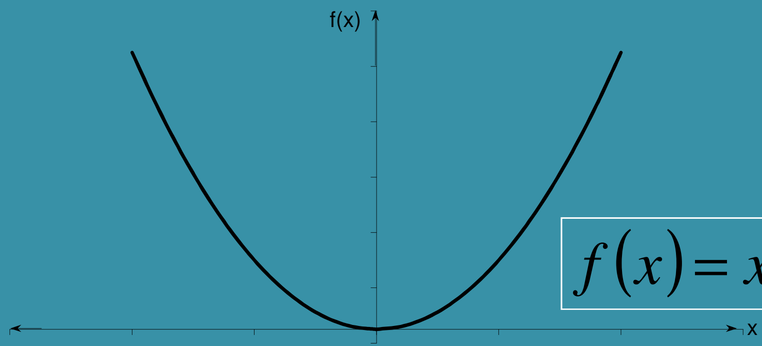
- Selalu konvergen.
- Akar persamaan berkurang pada setiap iterasi.

Kekurangan Metode Bisection

- Mencapai konvergen relatif lama
- Bila nilai perkiraan akar awal terlalu dekat dengan nilai akarnya, konverge dicapai lebih lama.

Kekurangan Metode Bisection

- Bila fungsi *f(x)* sedemikian rupa sehingga hanya menyentuh sumbu x, maka tidak diperoleh nilai perkiraan terendah dan tertinggi.



$$f(x) = x^2$$

Kekurangan Metode Bisection

- Fungsi berubah tanda, tetapi tidak memiliki akar-akar persamaan.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$