

Analisa Terapan: Metode Numerik

Pertemuan ke-1

Sumber-Sumber Kesalahan (Source of Errors)

13 September 2012



Dr.Eng. Agus S. Muntohar -
Department of Civil Engineering

1

Dua sumber kesalahan numerik

- Kesalahan pembulatan (round off error)
- Kesalahan pemotongan (truncation error)

Dr.Eng. Agus S. Muntohar -
Department of Civil Engineering

2

Sumber-Sumber Kesalahan Numerik

KESALAHAN PEMBULATAN

Dr.Eng. Agus S. Muntohar -
Department of Civil Engineering

3

Kesalahan Pembulatan

- Disebabkan oleh perkiraan suatu bilangan
- Misalnya:

$$\frac{1}{3} \cong 0.333333$$

$$\sqrt{2} \cong 1.4142\dots$$

Dr.Eng. Agus S. Muntohar -
Department of Civil Engineering

4

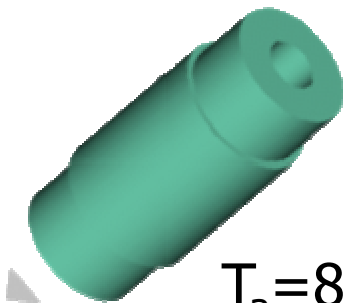
Kesalahan Pembulatan

PENGARUH JUMLAH DIGIT DALAM PENGHITUGAN

Dr.Eng. Agus S. Muntohar -
Department of Civil Engineering

5

Hitung pemendekan diameter?



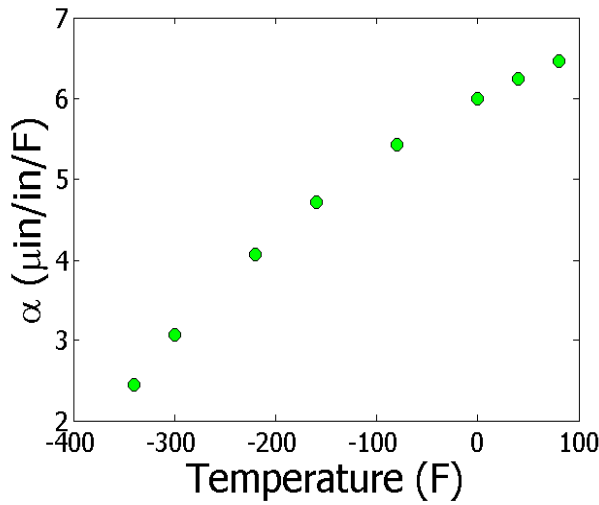
$$\Delta D = D \int_{T_a}^{T_c} \alpha(T) dT$$

$$T_a = 80^\circ\text{F}; T_c = -108^\circ\text{F}; D = 12.363''$$

$$\alpha = a_0 + a_1 T + a_2 T^2$$

6

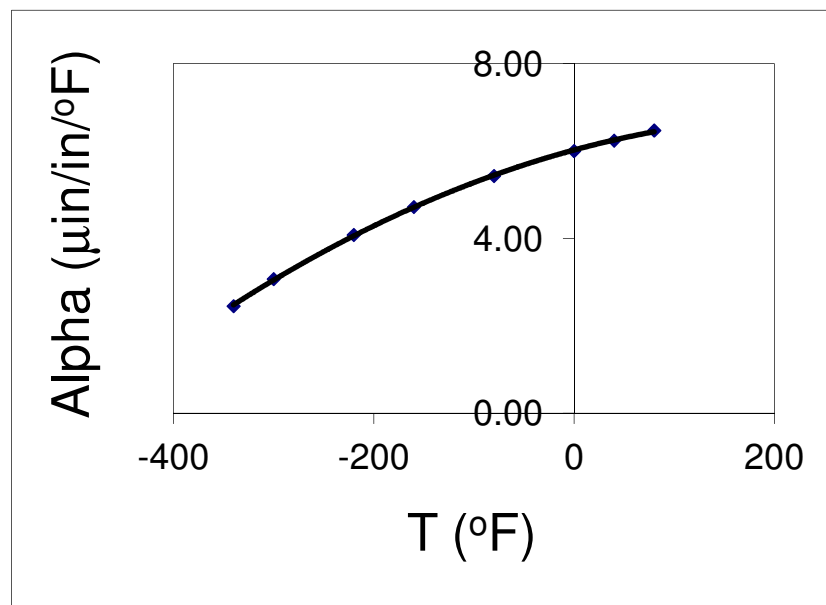
Koefisien pengembangan suhu vs Suhu



T($^\circ\text{F}$)	α ($\mu\text{in/in}/^\circ\text{F}$)
-340	2.45
-300	3.07
-220	4.08
-160	4.72
-80	5.43
0	6.00
40	6.24
80	6.47

7

Regresi Data dalam Ms Excel (general format)



$$\alpha = -1\text{E-}05T^2 + 0.0062T + 6.0234$$

8

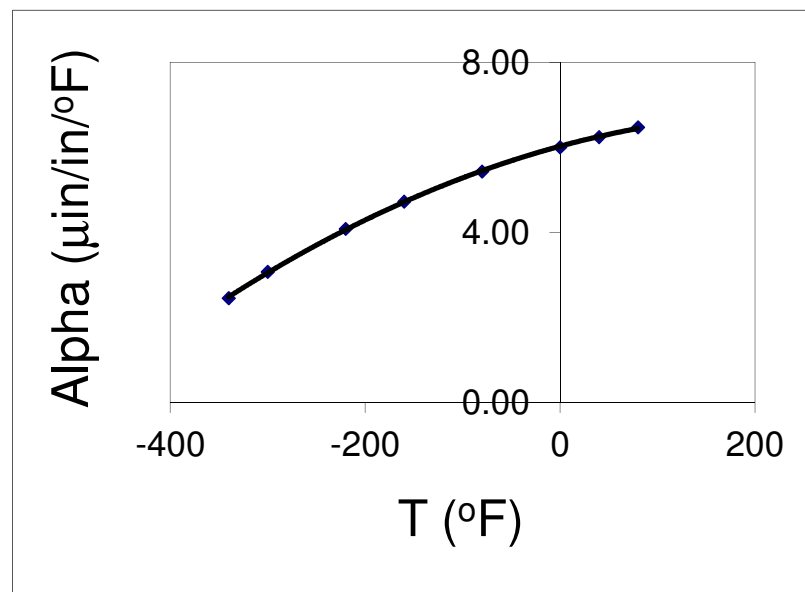
Nilai Pengamatan dan Perkiraan

$$\alpha = -1E-05T^2 + 0.0062T + 6.0234$$

T(°F)	α ($\mu\text{in}/\text{in}/^\circ\text{F}$) Pengamatan	α ($\mu\text{in}/\text{in}/^\circ\text{F}$) Perkiraan
-340	2.45	2.76
-300	3.07	3.26
-220	4.08	4.18
-160	4.72	4.78
-80	5.43	5.46
0	6.00	6.02
40	6.24	6.26
80	6.47	6.46

9

Regresi Data dalam Ms Excel (scientific format)



$$\alpha = -1.2360E-05T^2 + 6.2714E-03T + 6.0234$$

Nilai Pengamatan dan Perkiraan

$$\alpha = -1.2360E-05T^2 + 6.2714E-03T + 6.0234$$

T(°F)	α ($\mu\text{in/in/}^\circ\text{F}$) Pengamatan	α ($\mu\text{in/in/}^\circ\text{F}$) Perkiraan
-340	2.45	2.46
-300	3.07	3.03
-220	4.08	4.05
-160	4.72	4.70
-80	5.43	5.44
0	6.00	6.02
40	6.24	6.25
80	6.47	6.45

11

Nilai Pengamatan dan Perkiraan

$$\alpha = -1.2360E-05T^2 + 6.2714E-03T + 6.0234$$

$$\alpha = -1E-05T^2 + 0.0062T + 6.0234$$

T(°F)	α ($\mu\text{in/in/}^\circ\text{F}$) Pengamatan	α ($\mu\text{in/in/}^\circ\text{F}$) Perkiraan	α ($\mu\text{in/in/}^\circ\text{F}$) Perkiraan
-340	2.45	2.46	2.76
-300	3.07	3.03	3.26
-220	4.08	4.05	4.18
-160	4.72	4.70	4.78
-80	5.43	5.44	5.46
0	6.00	6.02	6.02
40	6.24	6.25	6.26
80	6.47	6.45	6.46

12

Sumber-Sumber Kesalahan Numerik

KESALAHAN PEMOTONGAN

Dr.Eng. Agus S. Muntohar -
Department of Civil Engineering

13

Kesalahan Pemotongan

- Kesalahan yang disebabkan oleh pemotongan atau pendekatan prosedur matematika.

Dr.Eng. Agus S. Muntohar -
Department of Civil Engineering

14

Contoh Kesalahan Pemotongan

Diambil beberapa suku dari deret Maclaurin untuk memperkirakan e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

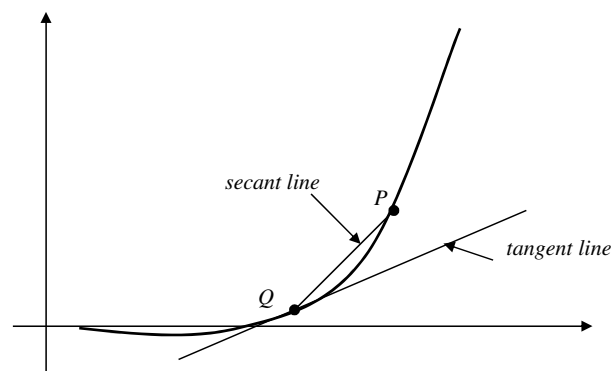
Jika hanya menggunakan 3 suku pertama,

$$\text{Kesalahan pemotongan} = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} \right)$$

Contoh lain Kesalahan Pemotongan

Digunakan interval Δx untuk memperkirakan $f'(x)$

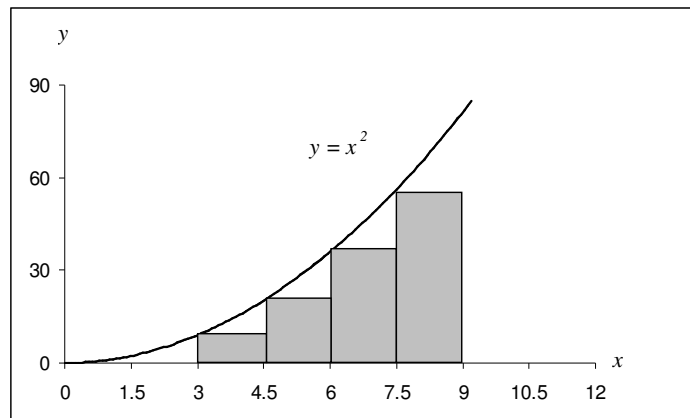
$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Gambar 1. Perkiraan derivasi dengan interval Δx

Contoh lain Kesalahan Pemotongan

Digunakan interval balok (histogram) untuk memperkirakan suatu integral.



Gambar 2. Perkiraan integral dengan interval balok

Contoh I — Deret Maclaurin

Hitung nilai dari $e^{1.2}$ dengan nilai mutlak dari kesalahan perkiraan relatif $< 1\%$

$$e^{1.2} = 1 + 1.2 + \frac{1.2^2}{2!} + \frac{1.2^3}{3!} + \dots$$

n	$e^{1.2}$	E_a	$ \epsilon_a \%$
1	1	—	—
2	2.2	1.2	54.545
3	2.92	0.72	24.658
4	3.208	0.288	8.9776
5	3.2944	0.0864	2.6226
6	3.3151	0.020736	0.62550

Diperlukan 6 suku pertama.

Contoh 2 — Turunan

Tentukan $f'(3)$ untuk $f(x) = x^2$ dengan menggunakan

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

dan $\Delta x = 0.2$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \frac{f(3+0.2) - f(3)}{0.2} \\ &= \frac{f(3.2) - f(3)}{0.2} = \frac{3.2^2 - 3^2}{0.2} = \frac{10.24 - 9}{0.2} = \frac{1.24}{0.2} = 6.2 \end{aligned}$$

Nilai sebenarnya

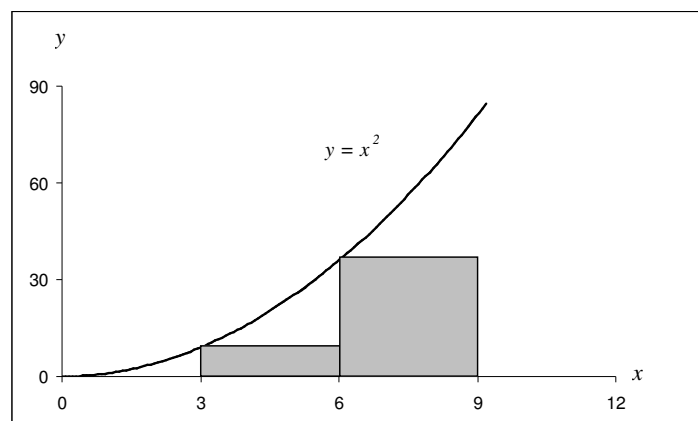
$$f'(x) = 2x, \quad f'(3) = 2 \times 3 = 6$$

Kesalahan pemotongan, $6 - 6.2 = -0.2$

Berapa kesalahan pemotongan untuk $\Delta x = 0.1$?

Contoh 3 — Integral

Digunakan dua histogram dengan lebar yang sama untuk memperkirakan luasan dibawah kurva $f(x) = x^2$ antara $[3,9]$



Contoh 3 (cont.)

Dipilih lebar 3, maka

$$\begin{aligned}\int_3^9 x^2 dx &= (x^2)\Big|_{x=3}^{6-3} + (x^2)\Big|_{x=6}^{9-6} \\ &= (3^2)3 + (6^2)3 \\ &= 27 + 108 = 135\end{aligned}$$

Nilai sebenarnya adalah $\int_3^9 x^2 dx \left[\frac{x^3}{3} \right]_3^9 = \left[\frac{9^3 - 3^3}{3} \right] = 234$

Kesalahan pemotongan, $234 - 135 = 99$

Berapa kesalahan pemotongan untuk 4 histogram?