Analisa Terapan: Metode Numerik

Pertemuan ke-1

Pengukuran Kesalahan (Measuring Error)

13 September 2012

Mengapa mengukur kesalahan?

1) Untuk menentukan ketepatan (accuracy) hasil penghitungan numerik.
2) Untuk membuat kriteria "stop" pada algoritma iterasi.

Kesalahan Eksak (True Error)

- Didefinisikan sebagai beda antara nilai eksak dalam penghitungan dan pendekatan menggunakan metode numerik.

Kesalahan Eksak, E_t = Nilai Eksak – Nilai pendekatan

Contoh 1— Kesalahan Eksak

Derivasi f′(x) dari sebuah fungsi f(x) dapat didekati dengan persamaan:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Jika f(x) = $7e^{0.5x}$ dan h = 0.3

a) Tentukan nilai pendekatan dari f′(2)

b) Nilai eksak dari f′(2)

c) Kesalahan eksak dari (a)

Contoh 1 (cont.)

Penyelesaian :

a) Untuk x =2 dan h = 0.3

$$
\begin{aligned}
f'(2) &\approx \frac{f(2+0.3)-f(2)}{0.3} \\
&= \frac{f(2.3)-f(2)}{0.3} \\
&= \frac{7e^{0.5(2.3)}-7e^{0.5(2)}}{0.3} \\
&= \frac{22.107-19.028}{0.3} \quad = 10.263
\end{aligned}
$$

Contoh 1 (cont.)

Penyelesaian:

b) Penyelesaian eksak dari f'(2) dapat diperoleh dengan menggunakan penurunan kalkulus

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 7e^{0.5x} \\
f'(x) &= 7 \times 0.5 \times e^{0.5x} \\
&= 3.5e^{0.5x}
\end{aligned}
$$

Maka nilai eksak dari f'(2) adalah

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= 3.5e^{0.5(2)} \\
&= 9.5140
\end{aligned}
$$

Kesalahan eksak dihitung

E_t = Nilai eksak – Nilai pendekatan

$$= 9.5140 - 10.263 = -0.722$$

Kesalahan Eksak Relatif (Relative True Error)

- Didefinisikan sebagai rasio antara nilai kesalahan eksak dan nilai eksak.

$$\text{Kesalahan eksak relatif, } \varepsilon_t = \frac{\text{Kesalahan eksak}}{\text{Nilai eksak}}$$

Contoh 2— Kesalahan Eksak Relatif

Seperti contoh sebelumnya, tentukan kesalah eksak relatif untuk f(x) = $7e^{0.5x}$ pada f'(2) dengan h = 0.3

Dari contoh sebelumnya

$$E_t = -0.722$$

Kesalahan eksak relatif $\in_t = \frac{\text{Kesalahan eksak}}{\text{Nilai eksak}}$

$$= \frac{-0.722}{9.5140} = -0.075888$$

Dinyatakan dalam persentase:

$$\in_t = -0.075888 \times 100\% = -7.5888\%$$

Kesalahan Perkiraan (Approximate Error)

- Apa yang dapat dilakukan bila nilai eksak tidak diketahui atau sulit diperoleh?
- Kesalahan perkiraan didefinisikan sebagai beda antara nilai perkiraan sekarang (ke-n) dengan nilai perkiraan sebelumnya (ke-(n-1)).

Kesalahan perkiraan, E_a = Nilai perkiraan ke-n – Nilai perkiraan ke-(n-1)

Contoh 3— Kesalahan Perkiraan

Untuk $f(x) = 7e^{0.5x}$ pada x = 2, tentukan

a) f′(2) dengan h = 0.3

b) f′(2) dengan h = 0.15

c) Kesalahan perkiraan untuk nilai dari f′(2) pada (b)

Penyelesaian:

a) Untuk x = 2 dan h = 0.3

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.3) - f(2)}{0.3}$$

Contoh 3 (cont.)

$$= \frac{f(2.3) - f(2)}{0.3}$$

$$= \frac{7e^{0.5(2.3)} - 7e^{0.5(2)}}{0.3} = \frac{22.107 - 19.028}{0.3} = 10.263$$

b) Untuk x = 2 dan h = 0.15

$$f^{'}(2) \approx \frac{f(2+0.15) - f(2)}{0.15}$$

$$= \frac{f(2.15) - f(2)}{0.15}$$

$$= \frac{7e^{0.5(2.15)} - 7e^{0.5(2)}}{0.15}$$

$$= \frac{20.50 - 19.028}{0.15} = 9.8800$$

Contoh 3 (cont.)

c) Kesalah perkiraan

E_a = Nilai perkiraan ke-n – Nilai perkiraan ke-(n-1)

$$= 9.8800 - 10.263$$

$$= -0.38300$$

Kesalahan Perkiraan Relatif (Relative Approximate Error)

- Didefinisikan sebagai rasio antara kesalahan perkiraan dan nilai perkiraan ke-n.

$$\text{Kesalahan perkiraan relatif, } \varepsilon_a = \frac{\text{Kesalahan perkiraan}}{\text{Nilai perkiraan ke-n}}$$

Contoh 4 (cont.)

$$\in_a = \frac{\text{Kesalahan perkiraan}}{\text{Nilai perkiraan ke-n}}$$

$$= \frac{-0.38300}{9.8800} = -0.038765$$

Dalam persentase

$$\in_a = -0.038765 \times 100\,\% = -3.8765\,\%$$

Nilai absolut kesalahan perkiraan relatif dihitung dengan

$$|\in_a| = |-0.038765| = 0.038765 = 3.8765\,\%$$

Kriteria "stop"?

- Bila $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$, dimana ε_s adalah nilai toleransi yang ditentukan, kemudian tidak ada lagi interasi yang dilakukan dan proses dihentikan.
- Bila sejumah ***m*** digit penting diperlukan sebagai hasil jawaban yang benar , maka

$$|\epsilon_a| \leq 0.5 \times 10^{2-m} \%$$

Contoh 4— Kesalahan Perkiraan Relatif

Untuk $f(x) = 7e^{0.5x}$ pada x = 2, tentukan kesalahan perkiraan relatif dari nilai h = 0.3 dan h = 0.15

Penyelesaian:

Dari Contoh 3, nilai perkiraan dari f'(2) = 10.263 dengan h = 0.3 dan f'(2) = 9.800 dengan h = 0.15

Ea = Kesalahan perkiraan ke-n – Kesalahan perkiraan ke-(n-1)

= 9.800 – 10.263 = -0.383

Tabel Nilai-Nilai

Untuk $f(x) = 7e^{0.5x}$ pada x = 2 dengan variasi interval *h*

h	$f'(2)$	$\lvert\in_a\rvert$	m
0.3	10.263	N/A	0
0.15	9.8800	3.877%	1
0.10	9.7558	1.273%	1
0.01	9.5378	2.285%	1
0.001	9.5164	0.2249%	2