Analisa Terapan: Metode Numerik

Pertemuan ke-2

Deret Taylor (Taylor Series)

20 September 2012

Deret Taylor

Beberapa contoh deret Taylor yang sering dituliskan dalam bentuk

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Bentuk Umum Deret Taylor

Bentuk umum deret Taylor

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \cdots$$

asalkan semua turunan dari f(x) adalah kontinyu dan berada dalam interval [x,x+h]

What does this mean in plain English?

As Archimedes would have said, "*Give me the value of the function at a single point, and the value of all (first, second, and so on) its derivatives at that single point, and I can give you the value of the function at any other point*" (*fine print excluded*)

Contoh 1— Deret Taylor

Cari nilai dari f(6), diberikan f(4) = 125, f′(4) = 74, f″(4) = 30, f‴(4) = 6, dan semua turunan tingkat tinggi dari f(x) pada x = 4 adalah nol

Penyelesaian:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots$$

$$x = 4$$

$$h = 6 - 4 = 2$$

Contoh 1(cont.)

Karena semua turunan tingkat tinggi adalah nol,

$$f(4+2) = f(4) + f'(4)2 + f''(4)\frac{2^2}{2!} + f'''(4)\frac{2^3}{3!}$$

$$f(6) = 125 + 74(2) + 30\left(\frac{2^2}{2!}\right) + 6\left(\frac{2^3}{3!}\right)$$

$$= 125 + 148 + 60 + 8$$

$$= 341$$

Untuk memperoleh f(6) secara eksak, kita hanya memerlukan nilai dari fungsi dan semua turunannya pada beberapa titik, dalam hal ini x = 4

Turunan Deret Maclaurin Untuk e^x

Turunkan deret Maclaurin: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Derat Maclaurin adalah bentuk sederana dari deret Taylor pada titik *x = 0*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f''''(x)\frac{h^4}{4} + f'''''(x)\frac{h^5}{5} + \cdots$$

$$f(0+h) = f(0) + f'(0)h + f''(0)\frac{h^2}{2!} + f'''(0)\frac{h^3}{3!} + f''''(0)\frac{h^4}{4} + f'''''(0)\frac{h^5}{5} + \cdots$$

Deret Maclaurin (cont.)

Karena, $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^n(x) = e^x$

dan, $f^n(0) = e^0 = 1$

Maka deret Maclaurin adalah

$$f(h) = (e^0) + (e^0)h + \frac{(e^0)}{2!}h^2 + \frac{(e^0)}{3!}h^3 \ldots$$

$$= 1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 \ldots$$

Sehingga diperoleh, $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Kesalahan dalam Deret Taylor

Bentuk deret Taylor polynomial order *n* dari suatu fungsi *f(x)* dengan *(n+1)* turunan kontinyu dalam interval [*x,x+h]* diberikan oleh

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!} + R_n(x)$$

dengan kesalahan pemotongan

$$R_n(x) = \frac{(x-h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

dimana

$$x < c < x + h$$

yaitu c adalah sebarang titik dalam interval [x,x+h]

Contoh 2 — Kesalahan dalam Deret Taylor

Deret Taylor untuk e^x pada titik x = 0 diberikan oleh

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Dapat diketahui bahwa bila jumlah suku pertama yang digunakan bertambah, kesalahan akan berkurang dan diperoleh perkiraan kesalahan fungsi yang lebih baik

Berapa banyak suku pertama yang diperlukan utuk memperoleh perkiraan e^1 dengan besaran kesalahan eksak < 10^{-6}?

Contoh 2 — (cont.)

Penyelesaian :

Pada (n+1), deret Taylor memberikan kesalahan,

$$R_n(x) = \frac{(x-h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \qquad x = 0, h = 1, f(x) = e^x$$

$$R_n(0) = \frac{(0-1)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

dengan,

$$x < c < x + h$$
$$0 < c < 0 + 1$$
$$0 < c < 1 \qquad \frac{1}{(n+1)!} < |R_n(0)| < \frac{e}{(n+1)!}$$

Contoh 2 — (cont.)

Jadi bila diinginkan untuk mendapatkan jumlah suku pertama yang diperlukan untuk memperkirakan e^1 dengan besaran kesalah eksak < 10^{-6},

$$\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

$$(n+1)! > 10^{6} e$$

$$(n+1)! > 10^{6} \times 3$$

$$n \geq 9$$

Jadi diperlukan 9 suku pertama untuk memperoleh kesalahan eksak < 10^{-6}.