Soal
Pertemuan ke-16: Analisis Terapan

Selasa, 15 Januari 2013

(UJIAN AKHIR SEMESTER)

Tegangan – regangan suatu batuan diberikan pada Tabel 1 sebagai berikut

Tabel 1 Hasil pengamatan tegangan dan regangan

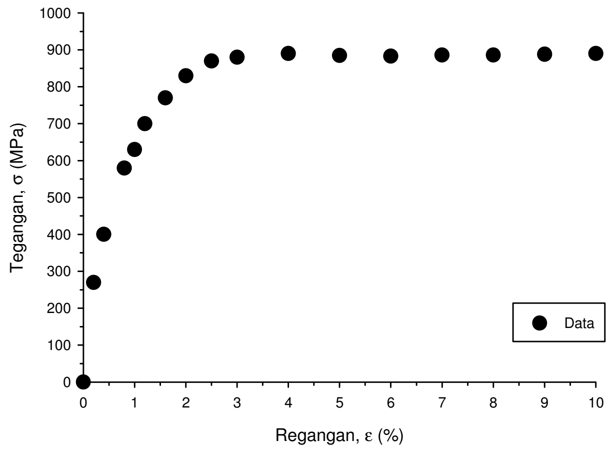
Regangan, ε (%)	Tegangan, σ (MPa)
0	0
0.2	270
0.4	400
0.8	580
1	630
1.2	700
1.6	770
2	830
2.5	870
3	880
4	890
5	885
6	883
7	886
8	886
9	888
10	890

Data pada Tabel 1 dapat dilukiskan seperti pada Gambar 1.

a. Pada Gambar 1 dengan jelas terlihat bahwa pada interval regangan dari 0 hingga 1% terjadi perubahan regangan yang drastis. Pada interval regangan 0 hingga 1% tersebut, perkirakanlah tegangan untuk setiap interval regangan 0,1% dengan menggunakan interpolasi metode Lagrange dan Newton Divided Difference! (Catatan: Metode Lagrange dikerjakan untuk KETUA KELOMPOK BERNOMOR MAHASISWA GANJIL, Metode NDD dikerjakan untuk KETUA KELOMPOK BERNOMOR MAHASISWA GENAP)!

b. Lakukan regresi non-linier dengan model hiperbolik $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{a+b\varepsilon}$!

c. Hitung energi regangan (strain energy) pada bagian linier! Gunakan Metode Integrasi yang relevan!



Gambar 1 Plot data tegangan - regangan

Kerjakan sesuai dengan kelompok, silahkan untuk berdiskusi. Dilarang menyalin/menjiplak pekerjaan kelompok lain. Jawaban dikumpulkan di ruang Dosen, pada hari Selasa 15 Januari 2012 jam 12.00 WIB (batas akhir).

JAWABAN:

(a) Interpolasi Linier

Interpolasi Lagrange : $\sigma_i(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} L_i(\varepsilon)\sigma(\varepsilon_i)$, dimana $L_i(\varepsilon) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{\varepsilon-\varepsilon_j}{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$

Untuk interpolasi Lagrange untuk n = 1 (Linier) :

$\sigma(\varepsilon) = L_0(\varepsilon)\sigma(\varepsilon_0) + L_1(\varepsilon)\sigma(\varepsilon_1)$, dimana $L_0(\varepsilon) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{1} \dfrac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon_0-\varepsilon_1}$; $L_1(\varepsilon) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{1} \dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_1-\varepsilon_0}$

Tabel 2 Hasil penghitungan interpolasi Metode Lagrange orde 1

ε	ε_0	ε_1	σ(ε_0)	σ (ε_1)	L_0(ε)	L_1(ε)	σ (ε)
0.1	0	0.2	0	270	0.5	0.5	135
0.3	0.2	0.4	270	400	0.5	0.5	335
0.5	0.4	0.8	400	580	0.75	0.25	445

ε	ε_0	ε_1	$\sigma(\varepsilon_0)$	$\sigma(\varepsilon_1)$	$L_0(\varepsilon)$	$L_1(\varepsilon)$	σ (ε)
0.6	0.4	0.8	400	580	0.5	0.5	490
0.7	0.4	0.8	400	580	0.25	0.75	535
0.9	0.8	1	580	630	0.5	0.5	605

Catatan: satuan ε adalah % dan σ adalah MPa.

Interpolasi Linier Metode NDD : $\sigma_1(\varepsilon) = b_0 + b_1(\varepsilon - \varepsilon_0)$

dengan $b_0 = \sigma(\varepsilon_0)$, dan $b_1 = \dfrac{\sigma(\varepsilon_1) - \sigma(\varepsilon_0)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}$

Tabel 3 Hasil penghitungan interpolasi linier Metode NDD

ε	ε_0	ε_1	$\sigma(\varepsilon_0)$	$\sigma(\varepsilon_1)$	$b_0(\varepsilon)$	$b_1(\varepsilon)$	σ (ε)
0.1	0	0.2	0	270	0	1350	135
0.3	0.2	0.4	270	400	270	650	335
0.5	0.4	0.8	400	580	400	450	445
0.6	0.4	0.8	400	580	400	450	490
0.7	0.4	0.8	400	580	400	450	535
0.9	0.8	1	580	630	580	250	605

Catatan: satuan ε adalah % dan σ adalah MPa.

(b) Regresi Non Linier Model Hiperbolik : $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{a + b\varepsilon}$

Metode Least Square Root: $S_r = \sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_i - \dfrac{\varepsilon_i}{a + b\varepsilon_i}\right)^2$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}\left\{2\left(\sigma_i - \frac{\varepsilon_i}{a+b\varepsilon_i}\right)\left[\frac{\varepsilon_i}{(a+b\varepsilon_i)^2}\right]\right\} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n}\left\{2\left(\sigma_i - \frac{\varepsilon_i}{a+b\varepsilon_i}\right)\left[\frac{\varepsilon_i^2}{(a+b\varepsilon_i)^2}\right]\right\} = 0 \qquad (2)$$

Persamaan (1) diselesaikan menjadi:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot\varepsilon_i\sigma_i + b\cdot\varepsilon_i^2\sigma_i - \varepsilon_i^2\right) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i + b\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = 0$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 - b\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i}{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i} \qquad (1a)$$

Persamaan (2) diselesaikan menjadi:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a\cdot\varepsilon_i^2\sigma_i + b\cdot\varepsilon_i^3\sigma_i - \varepsilon_i^3\right) = 0$$

$$a\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i + b\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3 = 0 \qquad (2a)$$

Substitusi Pers.(1a) ke (2a) diperoleh :

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 - b\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i}{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i}\right)\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i + b\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3 = 0$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i - b\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i}{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i}\right) + b\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i - b\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i + b\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3\sigma_i\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i = 0$$

$$b\left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3\sigma_i\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i\right)^2\right] + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i = 0$$

dan $$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i}{\left[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^3\sigma_i\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i\sigma_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\sigma_i\right)^2\right]} \qquad (2b)$$

Maka konstanta persamaan hiperbolik diperoleh dari Pers. (2b) dan (1a).

Tabel 4 Penghitungan konstanta persamaan hiperbolik

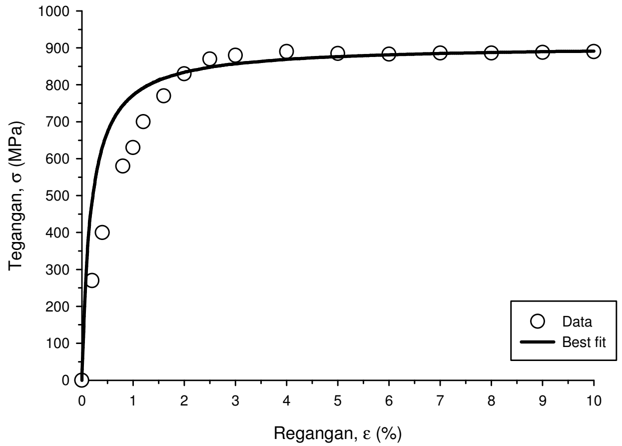
i	ε_i	σ_i	$\varepsilon_i\sigma_i$	ε_i^2	ε_i^3	$\varepsilon_i^2\sigma_i$	$\varepsilon_i^3\sigma_i$	σ'	|∈|
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.2	270	54	0.04	0.008	10.8	2.16	483.416	79.043
3	0.4	400	160	0.16	0.064	64	25.6	630.700	57.675
4	0.8	580	464	0.64	0.512	371.2	296.96	744.047	28.284
5	1	630	630	1	1	630	630	771.787	22.506
6	1.2	700	840	1.44	1.728	1008	1209.6	791.459	13.066

i	ε_i	σ_i	$\varepsilon_i\sigma_i$	ε_i^2	ε_i^3	$\varepsilon_i^2\sigma_i$	$\varepsilon_i^3\sigma_i$	σ'	|∈|
7	1.6	770	1232	2.56	4.096	1971.2	3153.92	817.506	6.170
8	2	830	1660	4	8	3320	6640	833.974	0.479
9	2.5	870	2175	6.25	15.625	5437.5	13593.75	847.633	2.571
10	3	880	2640	9	27	7920	23760	856.991	2.615
11	4	890	3560	16	64	14240	56960	868.983	2.362
12	5	885	4425	25	125	22125	110625	876.340	0.979
13	6	883	5298	36	216	31788	190728	881.315	0.191
14	7	886	6202	49	343	43414	303898	884.903	0.124
15	8	886	7088	64	512	56704	453632	887.613	0.182
16	9	888	7992	81	729	71928	647352	889.732	0.195
17	10	890	8900	100	1000	89000	890000	891.435	0.161
Σ		**12138**	**53320**	**396.09**	**3047.033**	**349931.7**	**2702507**		

$$b=\frac{(3047.033)(53320)-(396.09)(349931.7)}{(2702507)(12138)-(349931.7)2}=0.001102$$

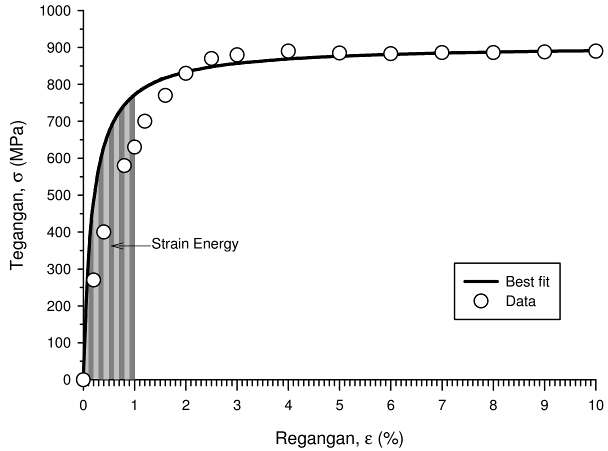
$$a=\frac{396.09-0.001102(349931.7)}{53320}=0.000193$$

Maka, hasil regresi (best fit) untuk persamaan hiperbolik : $\sigma=\dfrac{\varepsilon}{0.000193+0.001102\varepsilon}$



Gambar 2 Plot data tegangan – regangan dan kurva regresi model hiperbolik

(c) Strain Energy (U_E) pada interval ε = 0 – 1%



Gambar 3 Integrasi pada interval ε = 0 -1% untuk penghitungan Strain Energy

Integrasi kurva pada interval interval ε = 0 – 1% digunakan Metode Multi Segment-Trapezoid dengan h = 0.1, dan n = 10.

$$U_E=\int_0^1\sigma(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{1-0}{2n}\left[\sigma(0)+2\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\sigma(0+ih)\right\}+\sigma(1)\right]$$

$$=\frac{1-0}{2(10)}\left[0+2\left\{\sum_{i=1}^{10-1}\sigma(0+ih)\right\}+771.78\right]$$

dimana,

$$\sum_{i=1}^{10-1}\sigma(0+ih)=\sigma(0.1)+\sigma(0.2)+\sigma(0.3)+\sigma(0.4)+\sigma(0.5)+\sigma(0.6)+\sigma(0.7)+\sigma(0.8)+\sigma(0.9)$$

$$=(329.51+483.41+572.55+630.7+671.63+701.99+725.42+744.05+759.21)$$

$$=5618.48$$

Maka

$$U_E=\frac{1-0}{2(10)}\left[0+2(5618.48)+771.78\right]=600.437\ \text{J}$$